Baccalauréat S Pondichéry 3 avril 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dix affirmations, réparties en trois thèmes et numérotées de 1. a à 3. d sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX.
Chaque réponse convenable rapporte 0,4 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation 1. a	Pour tous les réels a et b : $(e^a)^b = e^{(a^b)}$.
Affirmation 1. b	Pour tous les réels a et b : $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.
Affirmation 1. c	La droite d'équation $y = x + 1$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en son point d'abscisse 1.

2. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

Affirmation 2. a	Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Affirmation 2. b	Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
Affirmation 2. c	Si f est dérivable en a, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.

3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation 3. a	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim (u_n + v_n) = 0$.
Affirmation 3. b	Si (u_n) converge vers un réel non nul et si $\lim v_n = +\infty$, alors la suite $\left(u_{n,} \times v_n\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. c	Si (u_n) converge vers un réel non nul, si (v_n) est positive et si $\lim v_n = 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.
Affirmation 3. d	Si (u_n) et (v_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 5 cm.
On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout enfler naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. a. Établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
En déduire la nature du triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Exprimer ℓ_n, en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 2 — 4 points

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 5 cm pour unité graphique.

Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z + 1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.
2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

   a. Déterminer les affixes des points A_1 A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

   c. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0,1 ?
3. a. Quelle est la nature du triangle ΩA_0A_1 ?
   En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle ΩA_nA_{n+1}.

   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1+A_1A_2+\ldots+A_{n-1}A_n$. Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A

(cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cx + d = 0$.
On considère le point I de coordonnées $\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de I au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_1,\ y_1$ et z_1, un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$.

a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$.

b. Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_1, y_1 et z_1.

c. En déduire que $IH = \dfrac{\left|ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère $\mathcal{S}$ de centre le point Ω de coordonnées $(1,\ -1,\ 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$.

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan $\mathcal{Q}$

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{Q}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

Partie A

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y' = -\frac{1}{20}y(3 - \ln y).$$

1. Démontrer l'équivalence suivante : Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\ ;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3 - \ln\left(f(t)\right)]$ si et seulement si la fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $g'(t) = \dfrac{1}{20}g(t) - \dfrac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$\text{(H)} \qquad z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$

$$f(t) = \exp\left[3 + C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle naturelle $x \mapsto \text{e}^x$).

4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par :

$$f(t) = \exp\left[3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right].$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0,02$.
Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

Partie B

En 2005, ce laboratoire de recherche met au point un test de dépistage de la maladie responsable de cette disparition et fournit les renseignements suivants : « La population testée comporte 50 % d'animaux malades. Si un animal est malade, le test est positif dans 99 % des cas ; si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1 % des cas ».

On note M l'évènement « l'animal est malade », $\overline{M}$ l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif ».

1. Determiner $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.
2. En déduire $P(T)$.
3. Le laboratoire estime qu'un test est fiable, si sa valeur prédictive, c'est-à-dire la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif, est supérieure à 0,999. Ce test est-il fiable ?

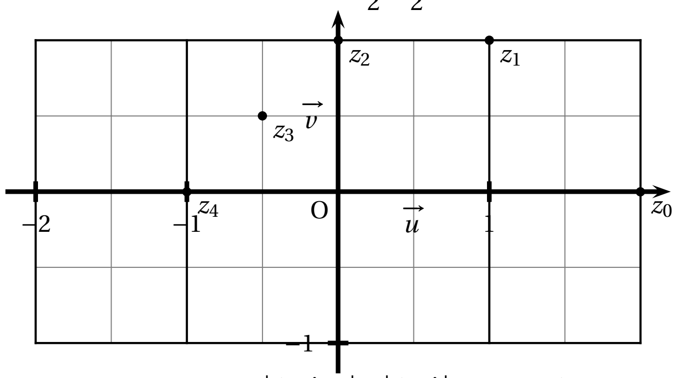
Corrigé du baccalauréat S Pondichéry
3 avril 2006

EXERCICE 1

1. **a.** Faux. Contre-exemple : $\left(\mathrm{e}^2\right)^3 = \mathrm{e}^6$ et $\mathrm{e}^{\left(2^3\right)} = \mathrm{e}^8$.
   b. Vrai.
   c. Faux. L'équation de la tangente est $y - \mathrm{e} = \mathrm{e}(x-1) \iff y = \mathrm{e}x$
2. **a.** Vrai.
   b. Faux. Exemple la fonction valeur absolue est continue et non dérivable en 0.
   c. Vrai. Définition du nombre dérivé $f'(a)$.
3. **a.** Faux. Contre-exemple : $u_n = 3n$ et $v_n = -2n$.
   b. Vrai : la suite a pour limite plus ou moins l'infini.
   c. Vrai : même chose, la suite a pour limite plus ou moins l'infini.
   d. Faux : si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, la suite diverge.

EXERCICE 2 (non spécialistes)

1. $z_0 = 2,\ z_1 = 1+\mathrm{i},\ z_2 = \mathrm{i},\ z_3 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2},\ z_4 = -1 \in \mathbb{R}$.



2. On a $u_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n\right| = \left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| \times |z_n| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_n$.
   L'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} u_n$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a $u_0 = |z_0| = |2| = 2$. On sait que $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Finalement :
   $$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$
3. On a $\mathrm{O}A_n = |z_n| = u_n$, donc A_n appartient au disque (fermé) decentre O et de rayon 0,1 si et seulement si $u_n \leqslant 0,1 \iff 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0,1 \iff 20 \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^n \iff 20 \leqslant 2^{\frac{n}{2}} \iff \dfrac{n}{2}\ln 2 \geqslant \ln 20 \iff n \geqslant \dfrac{2\ln 20}{\ln 2} \approx 8,6$.
   La condition sera donc réalisée la première fois par u_9. On a donc $n_0 = 9$.
   La calculatrice livre $u_8 = 0,125$ et$u_9 \approx 0,084 < 0,1$.
4. **a.** Pour tout naturel $n,\ u_n \neq 0$ donc $z_n \neq 0$. On peut donc écrire $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} =$
   $$\frac{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n - z_n}{\dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n} = \frac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}} = \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$
   L'interprétation géométrique de cette égalité est :

– $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}\,,\ \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : pour tout naturel n le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

– En modules l'égalité donne $\dfrac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}} = 1 \iff A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$. Conclusion le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}.
Finalement pour tout naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle en A_{n+1}, comme on peut le voir sur les quatre premiers triangles de la figure ci-dessus.

b. Comme les triangles sont isocèles $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Cette somme est la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_1 = \sqrt{2}$ et de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On a donc $\ell_n = \sqrt{2}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}^n}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^n-1\right)}{\sqrt{2}^{n-1}(\sqrt{2}-1)}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}^n-1}{\sqrt{2}^{n-1}} = \sqrt{2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1}.$$

EXERCICE 2 **(spécialité)**

1. La transformation f est de la forme $z' = az+b$ avec $a \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C}$: c'est donc une similitude.
Cherchons son centre Ω invariant par f :
$z_\Omega = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)z_\Omega + 1 \iff z_\Omega\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 1 \iff z_\Omega(1-\mathrm{i}) = 2 \iff z_\Omega = \dfrac{2}{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$.
Le centre de la similitude est donc Ω d'affixe $1+\mathrm{i}$.
Les deux égalités $z' = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)z+1$ et $1+\mathrm{i} = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})+1$ entraînent par différence :
$z'-(1+\mathrm{i}) = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)[z-(1+\mathrm{i})]$.
Or $\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. L'écriture de la similitude est donc finalement :

$$\boldsymbol{z'-(1+\mathrm{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}[z-(1+\mathrm{i})].}$$

On reconnaît la composée (dans n'importe quel ordre)
– d'une rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$;
– d'une homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. **a.** Les affixes sont respectivement : 0 ; 1 ; $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; $\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}$.

b. On a $u_n = \Omega A_n = |z_n - z_\Omega|$.
Or d'après la question 1., $z_{n+1}-z_\Omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left[z_n - z_\Omega\right]$, soit en prenant les modules :
$|z_{n+1}-z_\Omega| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left[z_n-z_\Omega\right]\right| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| \times \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| \times |z_n - z_\Omega| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 1 \times |z_n - z_\Omega|$,
ou encore $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u_n$, égalité qui montre que la suite (u_n) est une suite

géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, de premier terme $u_0 = \Omega A_0 = \Omega O = \sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 1).
Il en résulte que$u_n = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

c. D'après l'expression de u_n, tous les termes de la suite sont non nuls et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$: la suite est donc décroissante.
Donc s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} < 0,1$, tous les termes successifs vérifieront aussi cette inégalité.
Or $u_{n_0} < 0,1 \iff \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0} < 0,1 \iff \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n_0-1} < 0,1$, d'où d'après la croissance de la fonction logarithme népérien, $-(n_0-1)\ln\sqrt{2} < -\ln 10 \iff \ln 10 < (n_0-1)\ln\sqrt{2} \iff \dfrac{\ln 10}{\ln\sqrt{2}} < n_0 - 1 \iff n_0 > 1 + \dfrac{\ln 10}{\ln\sqrt{2}} \approx 7,6$.
Conclusion : le premier point appartenant au disque de centre Ω et de rayon 0,1 est le point A_8.

3. **a.** Le triangle $\Omega A_0 A_1$ est clairement rectangle isocèle en A_1.
Démontrons par récurrence que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1} :

– La propriété est initialisée pour $n = 0$.
– Supposons que le triangle $\Omega A_{n-1} A_n$ soit rectangle isocèle en A_n. Or le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est tout simplement l'image par la simitude du triangle $\Omega A_{n-1} A_n$: il est donc de même nature, soit rectangle isocèle en A_{n+1}.
La démonstration par récurrence est achevée.

b. D'après la question précédente $\ell_n = A_0A_1 + \cdots + A_{n-1}A_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \cdots + \Omega A_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, soit la somme des n premiers termes (exception faite deu_0) de la suite géométrique vue ci-dessus.
On a donc $\ell_n = 1 \times \dfrac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1}$.
Comme$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \mathbf{2+\sqrt{2}}$.

EXERCICE 3

Partie A

1. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda\overrightarrow{n}$, car on sait que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P. On a donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - x_1 & = & \lambda a \\ y - y_1 & = & \lambda b \\ z - z_1 & = & \lambda c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_1 + \lambda a \\ y & = & y_1 + \lambda b \\ z & = & z_1 + \lambda c \end{array}\right.$$

qui est une équation paramétrique de la droite Δ.

2. D'après la question 1, H est un point de Δ, il vérifie donc lui aussi la relation de colinéarité :

$$\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

3. On a donc $\left\{\begin{array}{rcl} x_H & = & x_1 + ka \\ y_H & = & y_1 + kb \\ z_H & = & z_1 + kc \end{array}\right.$ mais comme H appartient au plan P, ses coordonnées vérifient l'équation du plan soit $a(x_1k + a) + b(y_1 + kb) + c(z_1 + kc) +$

$d = 0 \iff k\left(a^2+b^2+c^2\right)+ax_1+by_1+cz_1+d = 0 \iff k = -\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2}$
(car a, b et c ne sont pas simultanément nuls).

4. La relation vectorielle $\overrightarrow{IH} = k\overrightarrow{n}$ entraîne l'égalité des normes : $IH = |k|\left\|\overrightarrow{n}\right\| = \dfrac{\left|ax_1+by_1+cz_1+d\right|}{a^2+b^2+c^2} \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{\left|ax_1+by_1+cz_1+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Partie B

1. On applique la partie A avec $I = \Omega$ et H point commun au plan $\mathcal{Q}$ et au plan P, le rayon de la spère est donc
$IH = \Omega H = \dfrac{|1\times 1-1\times(-1)+1\times 3-11|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

2. Un système d'équations paramétriques de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+\lambda \\ y & = & -1-\lambda \\ z & = & 3+\lambda \end{array}\right.$$

3. En reportant ces coordonnées dans l'équation de $\mathcal{Q}$ on obtient $1+\lambda+1+\lambda+3+\lambda-11 = 0 \iff 3\lambda-6 = 0 \iff \lambda = 2$. En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite Δ on obtient :
$x = 3$; $y = -3$; $z = 5$. Le point commun à la sphère et au plan a pour coordonnées (3 ; - 3 ; 5).

EXERCICE 4

Partie A

1. Soit f dérivable, strictement positive sur $[0~;~+\infty[$ et vérifiant
$f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3-\ln\left(f(t)\right)]$ (1). La fonction f étant strictement positive, la fonction $g = \ln f$ est bien définie sur $[0~;~+\infty[$ et $g' = \dfrac{f'}{f} \iff f' = f\times g'$. Mais alors l'équation différentielle (1) s'écrit $fg' = -\dfrac{1}{20}f[3-\ln f] \iff$
$g' = -\dfrac{1}{20}[3-g]$, car $f \neq 0$.
Inversement si la fonction $g = \ln f$ vérifie l'équation différentielle
$g' = -\dfrac{1}{20}[3-g]$ (2), alors puisque $g' = \dfrac{f'}{f}$ existe comme dérivée de la fonction composée de f avec la fonction ln sur $[0~;~+\infty[$, l'équation (2) s'écrit :
$\dfrac{f'}{f} = \dfrac{1}{20}\ln f - \dfrac{3}{20} \iff f' = \dfrac{1}{20}f\ln f - f\dfrac{3}{20} = -\dfrac{1}{20}f[3-\ln f]$.
On a donc bien montré l'équivalence.

2. Les solutions de l'équation $z' = -\dfrac{1}{20}z$ sont les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$.
D'autre part une solution particulière constante de l'équation $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$ est le nombre $-\dfrac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = 3$.
Finalement les solutions de l'équation $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$ sont les fonctions
$t \longmapsto g(t) = 3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

3. D'après la question 1, les fonctions solutions de (E) sont les fonctions f telles que g = ln $f \iff f = \exp(\text{g})$.
Conclusion finale : les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions f telles que :

$$f(t) = \exp\left(3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Soit $f(t) = \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$.

a. De $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = +\infty$, il résulte que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = -\infty$ et enfin que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0_+$.

b. On a $f'(t) = -\dfrac{3}{20}\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$ et comme les exponentielles sont strictement positives, f' est du signe de $-\dfrac{3}{20} < 0$. La fonction f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ de 1 (millier) à 0.

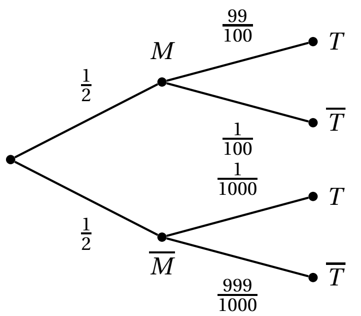
c. $f(t) < 0,02 \iff \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right) < 0,02$ soit d'après la croissance de la fonction logarithme népérien $3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < \ln 0,02 \iff 3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < -\ln 50 \iff 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > 3 + \ln 50 \iff \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > \dfrac{3 + \ln 50}{3} \iff \dfrac{t}{20} > \ln\left(\dfrac{3 + \ln 50}{3}\right) \iff$
$t > 20 \times \ln\left(\dfrac{3 + \ln 50}{3}\right)$.

L'ensemble solution est donc $S = \left]20\ln\left(\dfrac{3 + \ln 50}{3}\right)\ ;\ +\infty\right[$.

On a : 0,02 millier correspond à 20 individus. Comme $20 \times \ln\left(\dfrac{3 + \ln 50}{3}\right) \approx 16,6$, la population sera inférieure à 20 individus à partir de la dix-septième année.

Partie B

1. On dresse un arbre pondéré :



On a $p(M) = \dfrac{1}{2}$; $p_M(T) = \dfrac{99}{100}$ $\quad p_{\overline{M}}(T) = \dfrac{1}{1\,000}$ (d'après l'énoncé)

2. On a $p(T) = p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{99}{100} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1\,000} = \dfrac{991}{2\,000}$.

3. On a $p_T M = \dfrac{p(M \cap T}{p(T)} = \dfrac{\frac{99}{200}}{\frac{991}{2\,000}} = \dfrac{990}{991}$. Comme $\dfrac{990}{991} \approx 0,998\,99 < 0,999$, on en déduit que le test n'est pas fiable.