Liban Correction

1. Exercice 1

1. A, B et C sont alignés si il existe k réel tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$... ce qui est impossible.

2. a. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$; on calcule les produits scalaires $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-10+6+4=0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2-3+1=0$ donc (d) est orthogonale à (ABC). .

b. $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 2x-3y+z-4=0$.

3. a. On remplace x, y, z dans l'équation de (ABC) par : $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$, soit

$$2(-7+2t)-3(-3t)+(4+t)-4=0\Leftrightarrow 14t-14=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow\begin{cases}x=-7+2=-5\\y=-3\\z=4+1=5\end{cases}.$$

Le barycentre de {(A ; −2), (B ; −1), (C ; 2)} a pour coordonnées : $\begin{cases}x=\frac{1}{-1}(-2.2-1.(-3)+2.3)=-5\\y=\frac{1}{-1}(-2.1-1.(-1)+2.2)=-3\\z=\frac{1}{-1}(-2.3-1.7+2.4)=5\end{cases}$, c'est bien H.

b. On peut le faire avec les coordonnées ou avec le barycentre : $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$ d'où $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CB}=0$; Γ_1 est le **plan** passant par H et orthogonal à (CB).

c. $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}\Leftrightarrow MH=\sqrt{29}$: Γ_2 est la **sphère** de centre H, de rayon $\sqrt{29}$.

d. Comme Γ_1 contient H, l'intersection de Γ_1 et Γ_2 est le **cercle** de centre H, de rayon $\sqrt{29}$.

e. Il suffit de calculer la distance SH : $\sqrt{(-8+5)^2+(1+3)^2+(5-3)^2}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$ donc oui.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

1. a. $h_{(A,2)}:z\to z'/z'-z_A=\sqrt{2}(z-z_A)\Leftrightarrow z'-i=\sqrt{2}(z-i)z\Rightarrow z_{B_1}=\sqrt{2}(2-i)+i$.

b. $r_{(A,\pi/4)}:z'\to z''/z''-z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}(z'-z_A)\Leftrightarrow z''=e^{i\frac{\pi}{4}}(z'-i)+i\Rightarrow z_{B'}-i=e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{2}(2-i)+i-i\right]$, soit

$z_{B'}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left[\sqrt{2}(2-i)\right]+i=(1+i)(2-i)+i=3+2i$.

Remarque : si on développe dès le début, les calculs sont vraiment très laids…

2. a. $z'=(1+i)2+1=3+2i$.

b. $z=(1+i)z+1 \Leftrightarrow iz+1=0 \Leftrightarrow z=i$ donc A est le seul point invariant par f.

c. $\frac{z'-z}{i-z}=\frac{z+iz+1-z}{i-z}=\frac{i(z-i)}{i-z}=-i$. On a donc avec les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ d'affixe $z'-z$ et $\overrightarrow{MA}$ d'affixe $i-z$: $\frac{MM'}{MA}=|-i|=1 \Leftrightarrow MM'=MA$ et $\arg\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Pour un point M quelconque on trace le cercle de centre M, de rayon MA puis la perpendiculaire à (MA) passant par M qui va couper le cercle précédent en un seul point M' pour lequel l'angle droit sera négatif.

3. a. $|z-2|=\sqrt{2}$ caractérise le cercle de centre B, de rayon $\sqrt{2}$.

b. On vérifie par le calcul : $z'-3-2i=(1+i)z+1-3-2i=(1+i)z-2-2i=(1+i)(z-2)$.

Donc lorsque $|z-2|=\sqrt{2}$, on a $|z'-z_{B'}|=|1+i||z-2|=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ donc M' appartient au cercle de centre B', de rayon 2.

c. La figure est laissée au lecteur, le correcteur est fatigué…

3. Exercice 2 (spécialistes)

A d'affixe $3i$ et B d'affixe 6.

Partie A

1. $\begin{cases}0=a\times 3i+b\\ 6=a\times 0+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=6\\ a=2i\end{cases} \Rightarrow z'=2iz+6$.

Angle : $\frac{\pi}{2}$, rapport : 2, point invariant : $\omega=2i\omega+6 \Leftrightarrow \omega(1-2i)=6 \Leftrightarrow \omega=\frac{6}{5}(1+2i)$.

2. $\begin{cases}0=a\times\overline{3i}+b\\ 6=a\times 0+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0=a\times -3i+b\\ 6=a\times 0+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=6\\ a=-2i\end{cases} \Rightarrow z'=-2i\,\overline{z}+6$.

Partie B

1. $z'=-2i\,\overline{z}+6 \Leftrightarrow x'+iy'=-2i(x-iy)+6 \Leftrightarrow \begin{cases}x'=-2y+6\\ y'=-2x\end{cases}$.

On cherche le point invariant : $\begin{cases}x=-2y+6\\ y=-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4x+6\\ y=-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=4\end{cases}$; K a pour affixe $-2+4i$.

2. a. et b. $h: z\to z' / z'+2-4i=\frac{1}{2}(z+2-4i) \Leftrightarrow z'=\frac{1}{2}z-1+2i$.

$g=f\circ h: z\to z'\to z''=-2i\overline{z'}+6=-2i\left(\frac{1}{2}\overline{z}-1-2i\right)+6=-i\overline{z}+2i+2$. Il s'agit bien d'une isométrie car le module du coefficient de $\overline{z}$ est 1 ; l'image de K est $-i(-2-4i)+2i+2=2i-4+2i+2=-2+4i$, on retrouve bien K.

c. $z''=-i\,\overline{z}+2i+2 \Leftrightarrow x''+iy''=-i(x-iy)+2i+2 \Leftrightarrow \begin{cases}x''=-y+2\\ y''=-x+2\end{cases}$; si L est invariant il est tel que $\begin{cases}x=-y+2\\ y=-x+2\end{cases} \Leftrightarrow x+y-2=0$; s'il est sur $(O\,;\vec{v})$, son abscisse est nulle, soit $x=0$, ce qui donne le point $2i$.

g. est donc la réflexion d'axe (KL), d'équation $x+y-2=0$.

d. On a $f=f\circ h\circ h^{-1}=g\circ h^{-1}$ donc h' est l'homothétie de centre K, de rapport 2.

3. Comme h^{-1} transforme une droite en une droite parallèle, il suffit que Δ soit parallèle à (KL) pour que son image le soit également.

4. Exercice 3

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.

1. a. $f'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$; sur $[0\,;+\infty[$ les deux termes $\ln(1+x)$ et $\dfrac{x}{1+x}$ sont positifs donc f est croissante sur cet intervalle.

b. La tangente en O a pour équation $y=(\ln 1+0)(x-0)+0=0$ donc l'axe des abscisses est tangent à (C) au point O.

2. a. $\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$.

b. $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\ln 2$.

3. $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}I=\frac{1}{4}$.

4. La fonction f est continue, monotone strictement croissante et donc bijective de $f(0)=0$ vers $f(1)=\ln 2\approx 0,69$; comme $0,25\in[0\,;\ln 2]$, 0,25 a un unique antécédent dans [0 ; 1]. On obtient

x	$f(x)$
0,56020942	0,24919239
0,56544503	0,25341558

d'où $\alpha\approx 0,56$.

Partie B : étude d'une suite

1. $u_{n+1}-u_n=\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)\,dx-\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx=\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)\,dx$; comme $(x-1)$ est négatif et que les autres termes sont posititfs sur [0 ; 1], l'intégrale est négative et (u_n) est décroissante. Par ailleurs il est évident que (u_n) est positive donc (u_n) décroissante, minorée par 0 converge.

2. On a $\ln(x+1)<\ln 2$ sur [0 ; 1] donc $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx\le\int_0^1 x^n\ln 2dx=\ln 2\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{\ln 2}{n+1}$.

On a donc bien $0\le u_n\le\dfrac{\ln 2}{n+1}$. Comme $\dfrac{\ln 2}{n+1}$ tend vers 0 à l'infini, la suite converge vers 0.

5. Exercice 4

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $P(X\le t)=\displaystyle\int_0^t\lambda e^{-\lambda x}dx$.

1. $P(X>6)=1-P(X\le 6)=1-\displaystyle\int_0^6\lambda e^{-\lambda x}dx=1-\left[e^{-\lambda x}\right]_0^6=e^{-\lambda 6}$; on résoud :

$$e^{-6\lambda}=0,3\Leftrightarrow -6\lambda=\ln 0,3\Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln 0,3}{-6}=0,20066213...\approx 0,2.$$

2. $P(X\le t)=\int_0^t 0,2e^{-0,2x}\,dx=1-e^{-0,2t}=0,5\Leftrightarrow e^{-0,2t}=0,5\Leftrightarrow -0,2t=-\ln 2\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 2}{0,2}=3,47$, soit environ trois ans et demi.

3. La probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $P(X>2)=1-\left(1-e^{-0,2\times 2}\right)=e^{-0,4}$.

4. On cherche $P_{(X>2)}(X>6)=\dfrac{P\left[(X>2)\cap(X>6)\right]}{P(X>2)}=\dfrac{P(X>6)}{P(X>2)}=\dfrac{e^{-0,2\times 6}}{e^{-0,4}}=e^{0,4-1,2}=e^{-0,8}\approx 0,45$.

5. Y le nombre de robots sans pannes au cours des deux premières années suit une loi binomiale de paramètres $n=10$, $p=e^{-0,4}$; on cherche donc

$$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-\left(e^{-0,4}\right)^0\left(1-e^{-0,4}\right)^{10}\approx 0,9999.$$

C'est du bon matériel…