

✎ Corrigé du baccalauréat S Asie juin 2006 ✎

EXERCICE 1

4 points

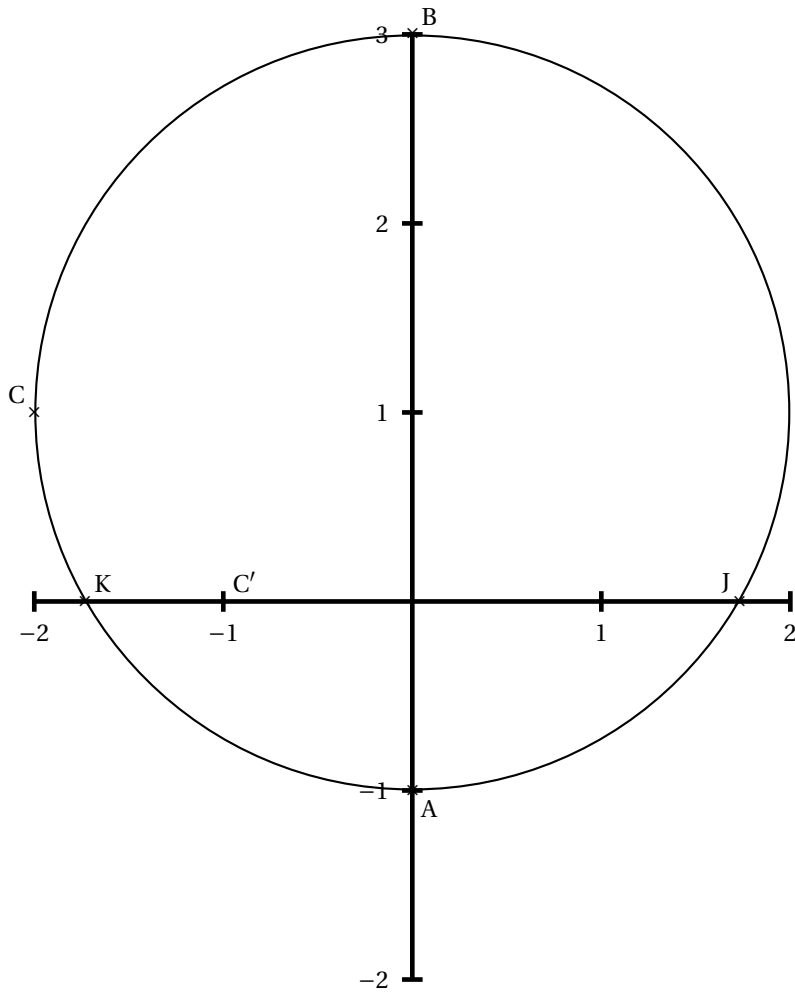
Commun à tous les candidats

Partie A. Restitution organisée de connaissances

On a $\arg\left(\frac{z}{z'} \times z'\right) = \arg z \iff \arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg z' = \arg z \iff \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.

Partie B

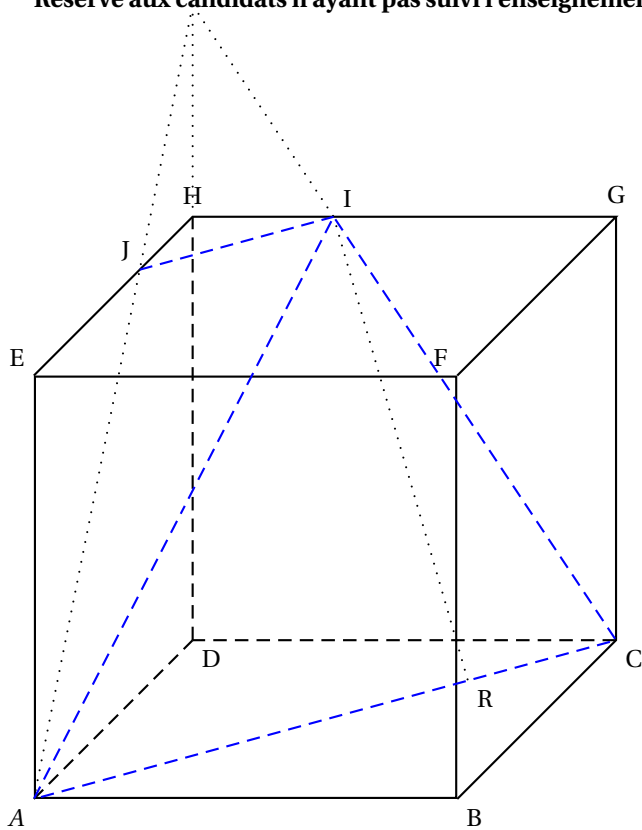
1. **a.** M d'affixe z (avec $z \neq -i$) est invariant par f si et seulement si $z = \frac{iz+3}{z+i} \iff z^2 + iz = iz + 3 \iff z^2 = 3$. Les points invariants sont donc les points J et K d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour rayon 2 et pour centre le point d'affixe i . Or la distance de ce point à J est égale à $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, donc J appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Même calcul pour K .
- b.** Si c' est l'affixe de C' , alors $c' = \frac{i(-2+3i)}{-2+i+i} = \frac{2-2i}{-2+2i} = -1$. Donc C' appartient à l'axe des abscisses.
2. On peut écrire $z' = \frac{iz+3}{z+i} = \frac{i(z-3i)}{z-(-i)}$. En prenant les arguments de ces deux complexes (et en utilisant le résultat de la partie A) on obtient $\arg(z') = \arg i + \arg\left(\frac{z-3i}{z-(-i)}\right) \text{ à } 2\pi \text{ près} \iff \arg(z') = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \text{ à } 2\pi \text{ près} \iff \arg(z') = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près}$.
3. **a.** z' est imaginaire pur si et seulement si son argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Les points M correspondants sont tous les points de la droite (AB) excepté les points A et B .
b. – Si M appartient au demi-cercle contenant K , alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}$ et par conséquent $\arg(z') = \pi$, donc M' a une affixe réelle négative.
– Si M appartient au demi-cercle contenant J , alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}$ et par conséquent $\arg(z') = 0$, donc M' a une affixe réelle positive.
Dans tous les cas si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B , le point M' appartient à l'axe des abscisses.
Autre méthode numérique : Si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$, son affixe s'écrit $z = i + 2e^{2i\theta}$, avec $\theta \in [0 ; 2\pi]$. On trouve alors que $z' = \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} \in \mathbb{R}$.



EXERCICE 2

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

5 points



1. Voir figure
2. Construction du point J :
 - Dans le plan CDHG, la droite (IC) coupe la droite (DH) en un point P ;
 - Dans le plan ADHE la droite (PA) coupe la droite (EH) en J.
 Le plan (ACI) est donc coupé par les deux faces parallèles (ABCD) et (EFGH) : les intersections (AC) et (IJ) sont donc parallèles.
3.
 - a. $R \in (AC)$: on sait qu'il existe un réel unique k tel que $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$, ce réel k étant l'abscisse de R si le repère de la droite (AC) est le couple (A, C).
 $(IR) \perp (AC) \iff \overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
 - b. Si R a pour coordonnées (x, y, z) , $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC} \implies x = k, y = k, z = 0$.
 $\overrightarrow{IR} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{3}\right) \times 1 + (y-1) \times 1 + (z-1) \times 0 = 0 \iff x - \frac{1}{3} + y - 1 = 0$.
 D'où en remplaçant par les coordonnées de R : $2k - \frac{4}{3} = 0 \iff k = \frac{2}{3}$.
 Conclusion : $R\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$.
 - c. On calcule $IR^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{11}{9} \implies IR = \frac{\sqrt{11}}{3}$.
4. \vec{n} de coordonnées $(3; -3; 2)$ est normal au vecteur $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$ (produit scalaire nul) et au vecteur $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{3}; 1; 1\right)$.
 Le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACI) est un vecteur normal à ce plan.
 Une équation du plan (ACI) est donc $3x - 3y + 2z + d = 0$ et comme ce plan contient $A(0; 0; 0)$, $d = 0$.
 Une équation du plan (ACI) est donc : $3x - 3y + 2z = 0$.
5. Avec $F(1; 0; 1)$ on sait que $d(F, ACI) = \frac{|3 \times 1 - 3 \times 0 + 2 \times 1|}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{22}}$.

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Si $n = 2 : 1^2 + 3^2 + 5^2 = 35 = 8 \times 4 + 3$, c'est-dire que $1^2 + 3^2 + 5^2 \equiv 3$ modulo 3. Le triplet $(1; 3; 5)$ est donc solution.
2.
 - a. Si $n = 3$

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

Exemple : si $m = 8n + 3$ alors $m^2 = 64n^2 + 48n + 9 = 64n^2 + 48n + 8 + 1 = 8 \times (n^2 + 6n + 1) + 1 \iff m^2 \equiv 1$ modulo 8.

- b. Les seuls restes possibles sont donc 0, 1 et 4. Avec trois carrés la somme des restes ne peut être que 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, mais pas 7.
 Conclusion : il n'existe pas d'entier x, y, z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8.

Partie B Étude du cas général où $n \geq 3$

1. S'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n alors $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n q + 2^n - 1 = 2^n(q + 1) - 1$, donc cette somme est impaire. Donc :
 - aucun des trois n'est pair ;
 - il ne peut y avoir un pair et deux impairs car la somme des carrés serait paire ;
 - il peut y avoir deux pairs ;
 - il ne peut y avoir trois pairs, car la somme des carrés serait paire.
2. $x = 2q, y = 2r, z = 2s + 1$.

- a. Donc $x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4r^2 + 4s^2 + 4s + 1 = 4 \times (q^2 + r^2 + s^2 + s) + 1$.
Conclusion $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4
- b. Or on a supposé que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n soit $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n \times q + 2^n - 1 = 4\alpha - 1$ (car n est au moins égal à 3).
Ceci est impossible : un multiple de 4 plus 1 ne peut être égal à un multiple de 4 moins 1.
En effet s'il existe α et β tels que :
 $8\alpha - 1 = 8\beta + 1$ alors $8\alpha - 8\beta = 2 \iff 4\alpha - 4\beta = 1$. La différence de deux multiples de 4 ne peut être égale à 1. Conclusion : il n'existe pas de triplet solution avec un seul impair.
3. On suppose que x, y, z sont impairs.
- a. Pour tout naturel k non nul, $k^2 + k = k \times (k + 1)$ produit de deux naturels consécutifs : l'un des deux facteurs est pair, donc le produit est pair.
- b. Posons : $x = 2q + 1, y = 2r + 1$ et $z = 2s + 1$, alors
 $x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4q + 1 + 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 = (4q^2 + 4q) + (4r^2 + 4r) + (4s^2 + 4s) + 3 = 4[(q^2 + q) + (r^2 + r) + (s^2 + s)] + 3$. Or d'après la question précédente chaque parenthèse est un nombre pair, donc $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \times (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + 3 = 8(\alpha + \beta + \gamma) + 3$ c'est-à-dire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.
- c. Or puisque $n \geq 3$ on peut écrire $x^2 + y^2 + z^2 = 2^3 \times 2^{n-3}q + 2^3 \times 2^{n-3} - 1 = 2^3a - 1 = 8a - 1$. (avec $a \in \mathbb{N}$)
On peut expliciter : s'il existe α et β tels que :
 $8\alpha - 1 = 8\beta + 3$ alors $8\alpha - 8\beta = 4 \iff 2\alpha - 2\beta = 1$. La différence de deux pairs ne peut être égale à 1. Ceci est impossible : Un multiple de 8 plus 3 ne peut être égal à un multiple de 8 moins 1.
Conclusion finale : pour $n > 2$ le problème proposé n'a pas de solution.

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. L'énoncé dit que $p_1 = 0,5$, que $p_{G_1}(G_2) = 0,7$ et que $p_{P_1}(G_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.
- b. Puisqu'il n'y a pas de match nul, on a $p_n + q_n = 1$.
- c. Pour $n \geq 1, p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p_{G_n}(G_{n+1}) + p_{P_n}(G_{n+1}) = p_n \times 0,7 + (1 - p_n) \times 0,2 \iff p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2 - 0,2p_n = 0,5p_n + 0,2$.
2. a. On peut écrire par exemple la relation de récurrence précédente
 $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2 \iff p_{n+1} - 0,4 = 0,5p_n + 0,2 - 0,4 \iff p_{n+1} - 0,4 = 0,5p_n - 0,2 \iff p_{n+1} - 0,4 = 0,5(p_n - 0,4) \iff v_{n+1} = 0,5v_n$.
Cette relation de récurrence montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
On en déduit que $v_n = v_1 \times 0,5^n$. Or $v_1 = p_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$. Donc $v_n = 0,1 \times 0,5^n$.
- b. On en déduit que $p_n = v_n + 0,4 = p_n = 0,4 + 0,1 \times 0,5^n$.
- c. Comme $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,4$.
Cela signifie que sur un grand nombre de parties, Pierre gagnera en moyenne 4 parties sur 10.

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats Partie A

1. Soit u telle que $u(x) = xe^{-x}$; alors $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ et $u' + u = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$, donc u est bien une solution de l'équation différentielle (E).
2. $(E_0) : y' + y = 0 \iff y' = -y$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$, C étant un réel quelconque.

3. Une fonction v est solution de (E) si et seulement si $v' + v = e^{-x}$. On a vu à la question 1 que u est une telle fonction donc que $u' + u = e^{-x}$. En calculant la différence membre à membre : $v' - u' + v - u = 0 \iff (v - u)' + (v - u) = 0$, autrement dit, la fonction $v - u$ est solution de E_0 .
4. On a donc pour toute solution v de (E), $v - u = Ce^{-x} \iff v = u + Ce^{-x} \iff v = xe^{-x} + Ce^{-x} \iff v = (x + C)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.
5. La solution f_2 prenant la valeur 2 en 0 vérifie $f_2(0) = (0 + C)e^0 = 2 \iff C = 2$.
Conclusion : $f_2(x) = (x + 2)e^{-x}$.

Partie B

1. - On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + k) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + k)e^{-x} = -\infty$.
- On a $f_k(x) = xe^{-x} + ke^{-x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0$.
L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à \mathcal{C}_k au voisinage de plus l'infini.
2. On remarque que les fonctions f_k sont toutes les solutions de l'équation différentielle (E), donc $f'_k + f_k = e^{-x}$. Donc $f'_k(x) = e^{-x} - f_k(x) = e^{-x} - (x + k)e^{-x} = f'_k(x) = e^{-x}(1 - k - x)$.
3. Comme $e^{-x} > 0$ quel que soit x réel, le signe de $f'_k(x)$ est celui de $1 - k - x$ expression qui s'annule pour $x = 1 - k$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$1 - k$	$+\infty$
$f'_k(x)$		+	-
$f_k(x)$		0	
		e^{k-1}	0
	$-\infty$		0

Partie C

1. a. $I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{-2}^0 = -1 + e^2 = e^2 - 1$.

b. On a $I_{n+1} = \int_{-2}^0 x^{n+1} e^{-x} dx$. On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{n+1} & v'(x) &= e^{-x} \\ u'(x) &= (n+1)x^n & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

toutes ces fonctions étant continues, car dérivables. En intégrant par parties :

$$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_{-2}^0 + (n+1) \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx, \text{ c'est-à-dire}$$

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)I_n.$$

On a donc une relation de récurrence pour le calcul de I_n .

c. Pour $n = 0$, la relation précédente s'écrit $I_1 = -2e^2 + I_0 = -2e^2 + e^2 - 1 = -e^2 - 1$.

De même avec $n = 1$, on obtient : $I_2 = (-2)^2 e^2 + 2I_1 = 4e^2 - 2e^2 - 2 = 2e^2 - 2$.

2. a. D'après A. 5. la fonction représentée est la fonction f_2 . Donc $k = 2$.

b. On a $\mathcal{S} = \int_{-\frac{3}{2}}^0 (x+2)e^{-x} dx = \int_{-\frac{3}{2}}^0 xe^{-x} dx + 2 \int_{-\frac{3}{2}}^0 e^{-x} dx = I_1 + 2I_0 = -e^2 - 1 + 2(e^2 - 1) = e^2 - 3$ u.a. (environ 4,39 u.a. ce que l'on contrôle sur le dessin)