

Exercice I :**Partie A : question de cours**

Soit u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante.

D'après le résultat (2), on a pour tout entier naturel n :

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0$$

En conséquence et d'après le résultat (3) :

- La suite u est croissante et majorée par v_0 , donc converge vers le réel ℓ .
- La suite v est décroissante et minorée par u_0 , donc converge vers le réel ℓ' .

Pour tout entier naturel n , on a : $u_n = (u_n - v_n) + v_n$

D'après le résultat (1), $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$; un passage à la limite dans l'égalité précédente donne alors :

$$\ell = \ell'$$

On a démontré que deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite .

Partie B

Pour arriver à faire cet exercice, il faut déjà une idée de la réponse!!!

1. FAUX.

En effet, considérons la suite u définie pour tout n par : $u_n = \frac{1}{n+1}$

Alors aucun terme de u_n n'est nul, et u converge vers 0.

Mais $v_n = \frac{-2}{u_n} = -2(n+1)$, donc v diverge vers $-\infty$.

2. VRAI.

Si (u_n) est minorée par 2, alors pour tout entier n , on a :

$$2 \leq u_n.$$

Comme la fonction inverse est décroissante sur $[2; +\infty[$, il vient :

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n}$$

En multipliant par -2 :

$$-1 \leq v_n.$$

Ainsi (v_n) est minorée par -1.

3. FAUX.

Soit u la suite définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Cette suite est décroissante (avec aucun terme nul) et la suite v définie par $v_n = \frac{-2}{u_n} = -2(n+1)$ est décroissante non constante, donc on ne peut pas dire qu'elle soit croissante.

4. FAUX.

Rappelons qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Donc soit elle tend vers $\pm\infty$, soit elle n'a pas de limite.

Pour construire un contre-exemple, il suffit de trouver une suite (u_n) qui diverge mais sans tendre vers l'infini.

Par exemple :

$$u_n = -2(-1)^n \text{ donc } v_n = (-1)^n.$$

Comme la suite de terme général $(-1)^n$ diverge alors u et v divergent.

Preuve de la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$:

Raisonnons par l'absurde et supposons que cette suite converge vers un réel ℓ .

Alors tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes $(-1)^n$ à partir d'un certain rang. Ainsi il existe un rang N à partir duquel on aura :

$$\begin{aligned} (-1)^n \in]\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}[&\Leftrightarrow \ell - \frac{1}{2} < (-1)^n < \ell + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -(-1)^n - \frac{1}{2} < -\ell < \frac{1}{2} - (-1)^n \\ &\Leftrightarrow -\left(-(-1)^n - \frac{1}{2}\right) > \ell > -\left(\frac{1}{2} - (-1)^n\right) \\ &\Leftrightarrow (-1)^n - \frac{1}{2} < \ell < (-1)^n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mais si n pair, $(-1)^n = 1$, donc l'encadrement donne $\frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$

Mais si n impair, $(-1)^n = -1$, donc l'encadrement donne $-\frac{3}{2} < \ell < -\frac{1}{2}$

Mais on ne peut avoir simultanément $\frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2} < \ell < -\frac{1}{2}$, on aboutit à une contradiction. Ainsi la supposition : "la suite de terme général $(-1)^n$ converge vers un réel ℓ " est fausse. Ainsi la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Exercice II :

- Le cercle \mathcal{C} est de diamètre $[OA]$, il est donc de centre le milieu I de $[OA]$, d'affixe $\frac{1}{2}$, et de rayon $\frac{1}{2}$.
Donc $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow IM = \frac{1}{2}$, c'est à dire :

$$\left| m - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

- Comme le carré $MKLO$ est direct, alors L est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc :

$$l = e^{i\frac{\pi}{2}}(m - 0) + 0 = im$$

De même le carré $MAPN$ est direct, alors P est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, donc :

$$p = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m - 1) + 1 = -i(m - 1) + 1 = -im + 1 + i.$$

On admettra que l'on a également $n = (1 - i)m + i$ et $k = (1 + i)m$.

- (a) Le milieu Ω du segment $[PL]$ a pour affixe

$$\frac{p + l}{2} = \frac{-im + 1 + i + im}{2} = \frac{1 + i}{2}.$$

Son affixe étant indépendante de m , alors Ω est un point indépendant de la position du point M sur le cercle \mathcal{C} .

- (b) En référence, à la relation de la question 1., nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1+i}{2} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{i}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc le point Ω appartient au cercle \mathcal{C} .

De plus, comme Ω est sur la droite $x = \frac{1}{2}$, médiatrice de $[OA]$, Ω est le "milieu" de l'arc de cercle supérieur OA .

4. (a)

$$\begin{aligned}KN &= |n - k| \\&= |(1 - i)m + i - ((1 + i)m)| \\&= |-2i)m + i| \\&= |-2i| \underbrace{\left| m - \frac{1}{2} \right|}_{=\frac{1}{2}\text{question 1.}} \\&= 2 \times \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

Ainsi la distance KN est constante.

(b) On conjecture que ce triangle ΩNK est rectangle isocèle en Ω . Démonstrons-le en montrant que K est l'image de N par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}e^{i\frac{\pi}{2}} \left(n - \frac{1+i}{2} \right) + \frac{1+i}{2} &= i \left((1-i)m + i - \frac{1+i}{2} \right) + \frac{1+i}{2} \\&= i((1-i)m + i) - i\frac{1+i}{2} + \frac{1+i}{2} \\&= i((1-i)m + i) + \frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2} \\&= (1+i)m - 1 + \frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2} \\&= (1+i)m = k\end{aligned}$$

CQFD.

5. Comme le triangle ΩNK est rectangle isocèle en Ω , alors en utilisant le théorème de Pythagore :

$$2\Omega N^2 = KN^2 = 1 \Leftrightarrow \Omega N = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi le point N appartient au cercle fixe (indépendant du point M) de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice III :

1. (a) Comme l'enfant tire simultanément les boules, il n'y a pas de première boule, ni de deuxième, etc., donc il y a un choix de trois boules parmi 13, c'est à dire qu'il y a $\binom{13}{3} = 286$ tirages au hasard possibles.

La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3, et de plus, pour obtenir :

• $X = 0$, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 3 boules vertes parmi les 3, donc :

$$P(X = 0) = \frac{1}{286}.$$

• $X = 1$, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 1 boule rouge parmi 10 et à chacun de ces tirages de cette boule rouge il y a un tirage de 2 boules vertes parmi les 3, donc :

$$P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1} \times \binom{3}{2}}{286} = \frac{30}{286}.$$

• $X = 2$, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 2 boules rouge parmi 10 et à chacun de ces tirages de ces boules rouges il y a un tirage de 1 boules verte parmi les 3, donc :

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2} \times \binom{3}{1}}{286} = \frac{135}{286}.$$

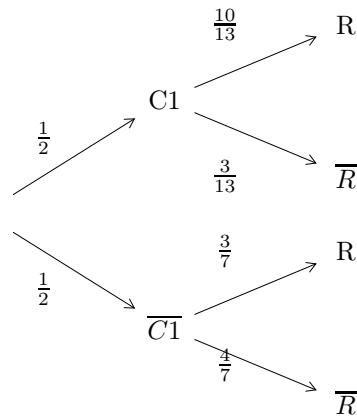
- $X = 3$, il faut et il suffit que l'enfant choisisse 3 boule rouge parmi 10, donc :

$$P(X = 3) = \frac{\binom{10}{3}}{286} = \frac{120}{286}.$$

Remarquez bien que $\sum_{k=0}^{k=3} P(X = k) = 1$, ce qui permet de s'assurer que notre raisonnement est cohérent à défaut d'être bon.

- (b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum_{k=0}^{k=3} k \times P(X = k) = 2,307$.

PS : Attention de bien respecter les consignes d'arrondi données en préambule.



2. (a)

- (b) D'après les formules des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap C1) + P(R \cap C2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{10}{13} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{109}{182} \approx 0,598 \end{aligned}$$

- (c) Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique est :

$$P(C1/R) = \frac{P(C1 \cap R)}{P(R)} = 0,642$$

3. Comme l'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place, le jeu est répétée de manière indépendante.

- (a) La probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix est , en passant à l'évènement contraire : $1 - P(\text{aucune boule rouge})$. Or, compte tenu de l'indépendance, la probabilité de n'avoir aucune boule rouge est :

$$P(\bar{R}) \times P(\bar{R}) \times P(\bar{R}) \cdots P(\bar{R}) = (P(\bar{R}))^n = \left(1 - \frac{109}{182}\right)^n = \left(\frac{73}{182}\right)^n$$

Donc,

$$p_n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$$

(b) Pour calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$, résolvons :

$$\begin{aligned}
 p_n \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geq 0,99 \\
 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n \geq 0,99 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{73}{182}\right)^n \leq 0,01 \\
 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{73}{182}\right)^n \leq \ln 0,01 \\
 &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{73}{182}\right) \leq \ln 0,01 \\
 &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{73}{182}\right)} \\
 &\Leftrightarrow n \geq 5,04
 \end{aligned}$$

Donc la valeur minimale est $n = 6$

Exercice IV :

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}.$$

a.

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}} &= \frac{3}{1 + 2 \times \frac{1}{e^{\frac{x}{4}}}} \\
 &= \frac{3}{\frac{e^{\frac{x}{4}} + 2}{e^{\frac{x}{4}}}} \\
 &= \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

b. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{4} = -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{4}} = 0$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

Par un raisonnement analogue, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

c. La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$, composée des fonctions dérivables : exp et $x \mapsto -\frac{x}{4}$, est dérivable sur \mathbb{R} donc f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f'(x) = 3 \times (-1) \frac{-\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2} = \frac{3}{4} \times \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{\left(1 + 2e^{-\frac{x}{4}}\right)^2}$$

Comme pour tout réel x , $e^{-\frac{x}{4}} > 0$, alors $f'(x) > 0$. Ainsi f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Partie B

1. (a) Les solutions de l'équation différentielle (E₁) : $y' = \frac{y}{4}$ sont les fonctions y définies par :

$$y(t) = Ke^{\frac{t}{4}}$$

avec K constante réelle. .

- (b) Comme g est une solution de l'équation différentielle (E₁), alors $g(t) = Ke^{\frac{t}{4}}$.

Donc $g(0) = Ke^{\frac{0}{4}} = K$ or $g(0) = 1$ donc $K = 1$.

Ainsi

$$g(t) = e^{\frac{t}{4}}$$

- (c) La population dépassera 300 rongeurs pour la première fois lorsque

$$\begin{aligned} g(t) \geq 3 &\Leftrightarrow e^{\frac{t}{4}} \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{t}{4}}\right) \geq \ln 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{4} \geq \ln 3 \\ &\Leftrightarrow t \geq 4 \ln 3 \end{aligned}$$

2. (a) Considérons une fonction u strictement positive vérifiant la condition (E₂), alors on a :

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Intéressons-nous à la fonction h définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$, vérifiant $h(t) = \frac{1}{u(t)}$.

Alors :

$$h(0) = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{1} = 1 \text{ et } h'(t) = -\frac{u'(t)}{u^2(t)}.$$

Mais $u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12}$ et $u(t) > 0$, donc, en divisant par $-u^2(t)$ l'égalité précédente, on obtient :

$$-\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{u(t)}{4u^2(t)} - \frac{[u(t)]^2}{12u^2(t)} \Leftrightarrow -\frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{1}{4} \frac{1}{u(t)} - \frac{1}{12}$$

C'est à dire :

$$h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}.$$

Ainsi la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3) \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1. \end{cases}$$

Comme nous avons procédé par équivalence, la fonction u satisfait aux conditions (E₂) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E₃).

- (b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont les fonctions y définies par :

$$y(t) = Ce^{-\frac{t}{4}} - \frac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}} = Ce^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$$

Ainsi $h(t) = Ce^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3}$, or $h(0) = 1$ donc $Ce^{-\frac{0}{4}} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$
donc

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(2e^{-\frac{t}{4}} + 1 \right)$$

Or

$$u(t) = \frac{1}{h(t)} \text{ donc } u(t) = \frac{1}{\frac{1}{3} \left(2e^{-\frac{t}{4}} + 1 \right)} = \frac{3}{2e^{-\frac{t}{4}} + 1}.$$

- (c) Dans ce modèle, la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$ s'approche de 3.
Ce calcul a été effectué dans la partie A.