

Baccalauréat S Polynésie 9 juin 2005

Exercice 1

3 points

1. A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0,02 \times 0,1 = 0,002$.
On a $p(C) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = 1 - 0,02 - 0,1 + 0,002 = 0,882$.
2. On a $p(\text{avoir le défaut } a \text{ seul}) = 0,02 - 0,002 = 0,018$.
De même $p(\text{avoir le défaut } b \text{ seul}) = 0,1 - 0,002 = 0,098$.
Donc $p(D) = 0,018 + 0,098 = 0,116$.
3. On a une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,882$.
 $p(E) = p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4} 0,882^4 \times 0,118 + \binom{5}{5} 0,882^5 \approx 0,8908$ soit $p(E) \approx 0,891$ à 10^{-3} près.

Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. A(3 ; 1 ; 3) et B(-6 ; 2 ; 1). Si G est le barycentre du système $\{(A, 4) ; (B, -1)\}$ (qui existe puisque $4 - 1 \neq 0$) $\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 2 \iff \|3\overrightarrow{MG}\| = 2 \iff GM = \frac{2}{3}$.
L'ensemble est donc une sphère de centre G de rayon $\frac{2}{3}$. Réponse **b.**
2. Soit $(x_H ; y_H ; z_H)$ les coordonnées du point H. Le vecteur \overrightarrow{AH} est colinéaire au vecteur normal au plan de coordonnées (1 ; 2 ; 2). Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_H - 3 = \alpha \\ y_H - 1 = 2\alpha \\ z_H - 3 = 3\alpha \end{cases}$$
et comme $H \in \mathcal{P}$, on a $3 + \alpha + 2(1 + 2\alpha) + 2(3 + 3\alpha) = 5 \iff \alpha = -\frac{2}{3}$.
On a donc $H\left(\frac{7}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right)$. Réponse **c.**
3. On calcule la distance du point B au plan \mathcal{P} :
 $d(B, \mathcal{P}) = \frac{|-6 + 4 + 2 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{5}{3}$. Cette distance étant supérieure au rayon 1 la sphère et le plan ne sont pas sécants. Réponse **c.**
4. Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ont respectivement pour vecteurs directeurs (1 ; 2 ; -1) et (2 ; 1 ; 1). Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
La droite \mathcal{D} a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$ ($t' \in \mathbb{R}$). Les droites sont sécantes s'il existe t et t' tels que :

$$\begin{cases} 3 + 2t = 3 + t' \\ 3 + t = 1 + 2t' \\ t = 3 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = t' \\ 3 = 4t' \\ t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 2 \\ t' = \frac{3}{4} \\ t = 1 \end{cases}$$
. Ce système n'admet pas de solution, donc les droites ne sont pas sécantes. Réponse **c.**
5. Les points équidistants de A et B est le plan médiateur de [AB] qui coupe [AB] en son milieu $I\left(-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} ; 2\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-9 ; 1 ; -2)$ est un vecteur normal à ce plan et les points M de ce plan médiateur vérifient : $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff -9\left(x + \frac{3}{2}\right) + 1\left(y - \frac{3}{2}\right) - 2(z - 2) = 0 \iff -9x + y - 2z - 11 = 0$. Réponse **b.**
On pouvait également partir de $MA^2 = Mb^2$.

Exercice 2

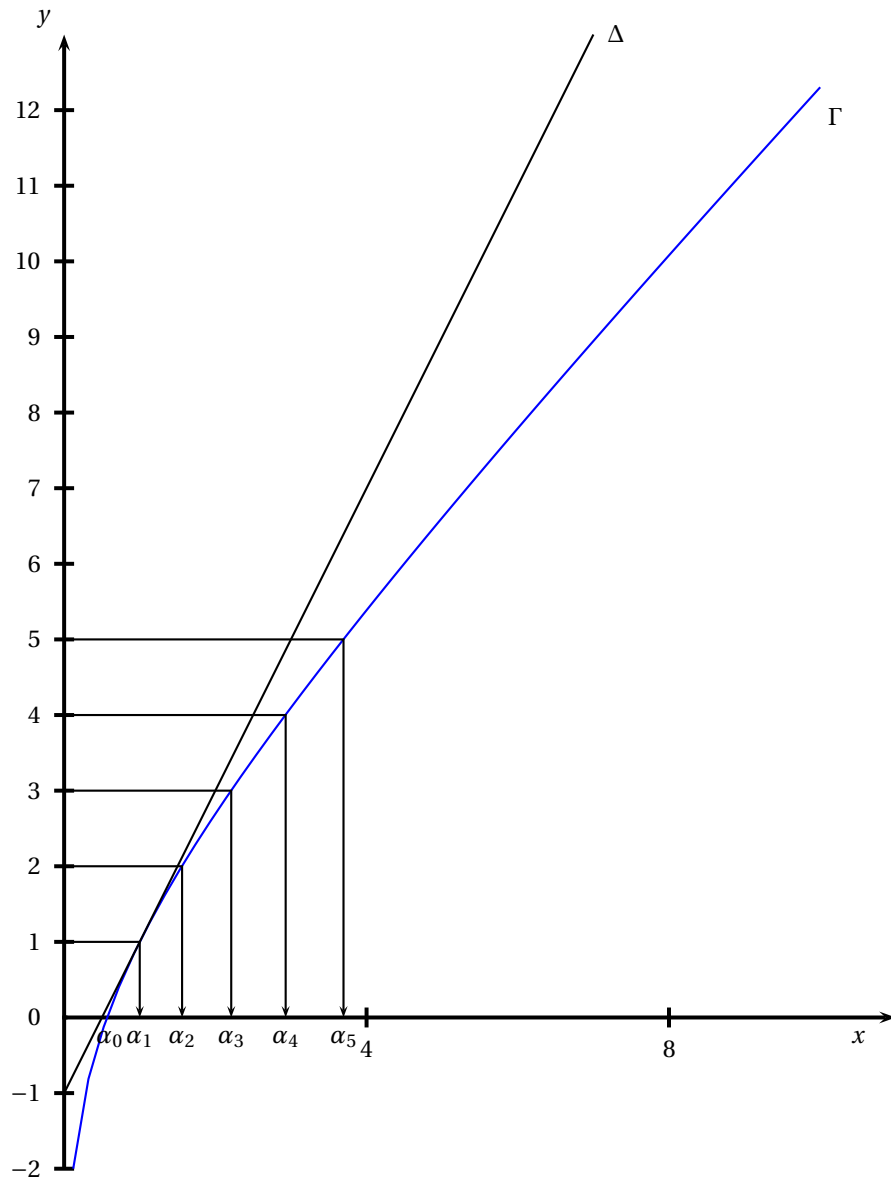
5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On calcule $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1\,564$, $u_4 = 7\,814$
On peut conjecturer que $u_{2k} = \dots 14$ et $u_{2k+1} = \dots 64$.
2. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36 = u_n + 24u_n + 36$.
Or $24u_n + 36 \equiv 0 \pmod{4}$, donc $u_{2n} \equiv u_n \pmod{4}$.
On en déduit que $u_{2k} \equiv u_0 = 4 \times 3 + 2$. Donc, pour tout naturel k , $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$.
De même $u_{2k+1} \equiv u_1 = 64 = 4 \times 16$; donc $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$, pour tout naturel k .
3. a. Initialisation : $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$: vraie.
Hérédité : supposons que pour l'entier n , on ait $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Calculons $2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 3$. La relation est donc vraie au rang $(n+1)$.
On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n , $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b. On a $2u_n = 5^{n+2} + 3 = 5^2 \times 5^n + 3 = 25 \times 5^n + 28 - 25 = 25(5^n - 1) + 28$.
Or $5^n - 1$ est divisible par $5 - 1 = 4$ (en général $x^n - 1$ est divisible par $x - 1$).
Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5^n - 1 = 4k$ et finalement :
 $2u_n = 100k + 28 \iff 2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.
4. Si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{Z}$ alors $2u_{2p} = 5^{2p+2} + 3 = (5^2)^{p+1} + 28 - 25 = 25(5^{2p} - 1) + 28$. Or $5^{2p} - 1 = (5^2)^p - 1 = 25^p - 1$ est divisible par $25 - 1 = 24 = 8 \times 3$ donc par 8. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $25^p - 1 = 8q$.
Finalement $2u_{2p} = 25 \times 8q + 28 \iff 2u_{2p} = 200q + 28 \iff u_{2p} = 100q + 14$.
Les nombres u_{2p} se terminent donc par 14.
Si $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$ alors $2u_{2p+1} = 5^{2p+3} + 3 = 5^3 \times 5^{2p} + 128 - 125 = 125(5^{2p} - 1) + 128 = 125(25^p - 1) + 128$.
On a vu que $25^p - 1 = 8q$, d'où $2u_{2p+1} = 125 \times 8q + 128 \iff 2u_{2p+1} = 1000q + 128 \iff u_{2p+1} = 500q + 64 \iff u_{2p+1} = 100q' + 64$.
Les nombres u_{2p+1} se terminent donc par 64.
On pouvait également écrire que $u_{2p+1} = 5u_{2p} - 6 = 5(100q + 14) - 6 = 100 \times 5q + 64$.
5. On utilise plusieurs fois la propriété : $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(a; a - b)$ si $a \geq b$.
Donc $\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n) = \text{PGCD}(5u_n - 6; u_n) = \dots = \text{PGCD}(u_n - 6; u_n) = \text{PGCD}(u_n; 6) \in \{1; 2; 3; 6\}$.
Or 6 et 3 ne divisent pas u_0 , mais tous les termes sont pairs.
Conclusion : $\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n) = 2$.

Exercice 3**7 points****Partie A**

1. a. On a de façon évidente $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
b. $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} \geq 1 > 0$. La fonction est donc croissante sur $]0; +\infty[$.
2. a. La fonction f est continue et croissante sur $]0; +\infty[$; de plus $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est une bijection de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R} , donc pour tout naturel n , il existe un unique antécédent α_n tel que $f(\alpha_n) = n$.
b. Figure



- c. On a $\alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$. Le graphe fait apparaître la solution évidente $\alpha_1 = 1$.
- d. De $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n+1$ on déduit par différence $f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n) = 1 > 0$ qui est équivalent par la croissance de f à $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0 \iff \alpha_{n+1} > \alpha_n$ qui démontre que la suite (α_n) est croissante.
3. a. $M(x; y) \in \Delta \iff \frac{y-1}{x-1} = f'(1) = 2 \iff y = 2x - 1$ (pour $x \neq 1$).
- b. $h(x) = \ln x - x + 1$; $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ qui est du signe de $1-x$. La fonction est donc croissante sur $]0; 1]$, puis décroissante. Elle présente donc un maximum pour $x = 1$ et $h(1) = 0$.
Conclusion : la fonction h est négative sur $]0; +\infty[$.
Or $h(x) = x + \ln x - (2x - 1)$, donc $h(x) \leq 0 \iff x + \ln x \leq 2x - 1$, ce qui signifie que pour tout réel positif, la courbe Γ est en dessous de Δ .
- c. Cf. figure.
4. Pour tout naturel n on a d'après la question précédente : $\ln \alpha_n + \alpha_n - 2\alpha_n + 1 \leq 0 \iff n - 2\alpha_n + 1 \leq 0 \iff \frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.
On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.

Partie B

1. Démonstration de cours : suite croissante non majorée

Soit M un réel fixé ; la suite (u_n) étant non majorée, il existe un naturel n_0 tel que $u_{n_0} > M$ et par croissance de la suite $n > n_0 \implies u_n > u_{n_0} > M$.

Cette propriété étant vraie pour tout réel M , la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

2. Si la suite (β_n) est majorée, étant croissante elle converge vers un réel ℓ . Donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \ell$, mais par continuité de la fonction g , $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(\beta_n) = g(\ell)$. Or $g(\beta_n) = n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = g(\ell) = +\infty$, ce qui est contradictoire.

Conclusion : la suite (β_n) non majorée et croissante tend vers plus l'infini d'après la question 1..

Exercice 4**5 points**

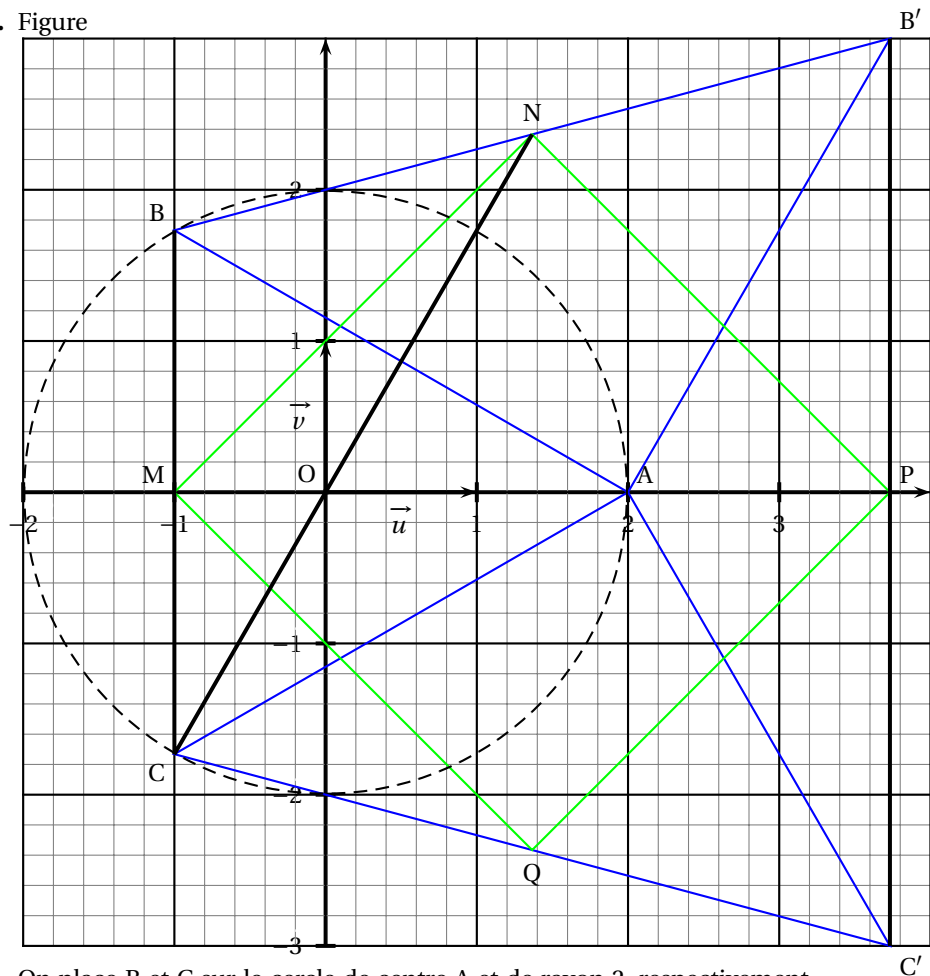
$$1. z^3 = 8 \iff z^3 = 2e^{2i\pi} \iff z = 2e^{2\frac{i\pi}{3}} \pmod{2\frac{i\pi}{3}}.$$

Il y a donc trois solutions : $z_1 = 2e^{2\frac{i\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$;

$$z_2 = 2e^{4\frac{i\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$
;

$$z_3 = 2e^{2i\pi} = 2.$$

$$S = \{2; -1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}.$$

2. a. Figure

b. On place B et C sur le cercle de centre A et de rayon 2, respectivement avec un argument de $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. B' et C' se construisent avec les triangles rectangles ABB' (indirect) et ACC' (direct).

c. La rotation r est définie par $z' - 2 = i(z - 2)$, donc $z_{C'} = 2 + i(-1 - i\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} - 3i$.

- d. De même la rotation r' est définie par
 $z' - 2 = -i(z - 2)$, donc $z_{B'} = 2 - i(-1 + i\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} + 3i$.
 Donc b' etc' sont bien conjuguées.
 Géométriquement : les points B et C sont symétriques autour de (Ox) ;
 par des considérations d'angles, leurs images par les deux rotations sont
 elles aussi symétriques autour de (Ox).

3. a. $n = \frac{-1 + i\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3i}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

- b. On constate que $\overrightarrow{ON} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$ ce qui signifie que les vecteurs sont
 colinéaires, donc que les points O, N et C sont alignés.

c. Calcul de $q = \frac{-1 - i\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 3i}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$.

Remarque : géométriquement Les segments $[BB']$ et $[CC']$ étant symé-
 triques autour de (Ox), leurs milieux le sont aussi, donc $q = \bar{n}$.

$q + 1$ étant différent de zéro, calculons $\frac{n+1}{q+1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3}) + 1}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i\sqrt{3}) + 1} =$

$\frac{1 + 2 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} + 3)i}{1 + 2 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 3)i} = \frac{3 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} + 3)i}{3 + \sqrt{3} - (\sqrt{3} + 3)i} = \frac{i[(\sqrt{3} + 3 - i(3 + \sqrt{3}))]}{(\sqrt{3} + 3 - i(3 + \sqrt{3}))} = i$.

On a donc bien démontré que $n + 1 = i(q + 1)$.

Cette égalité s'écrit encore $n - (-1) = i[q - (-1)]$ qui montre que N est
 l'image de Q dans la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$; donc le triangle
 MQN est un triangle rectangle isocèle direct, donc MNQ un triangle rec-
 tangle isocèle indirect.

- d. Dans le triangle $BB'C$, N est le milieu de $[BB']$ et M est le milieu de $[BC]$,
 donc la droite (MN) est parallèle à la droite $(B'C)$. De même la droite (PQ)
 est parallèle à la droite $(B'C)$ et par transitivité, les droites (MN) et (PQ)
 sont parallèles.

On démontre de la même façon que les droites (NP) et (MQ) sont paral-
 lèles.

Conclusion : le quadrilatère (MNPQ) a ses côtés opposés parallèles (c'est
 un parallélogramme), ayant deux côtés consécutifs de même longueur
 $MN = MQ$ (c'est un losange) et possède un angle droit (c'est donc un rec-
 tangle) et finalement un carré.