

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Liban juin 2005

EXERCICE 1

4 points

1. "Faux " ; exemple $a = 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. "Faux " ; exemple $f(x) = x$, $g(x) = x^2 + 1$.
3. "Vrai " Si $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$ et en multipliant chaque membre de l'encadrement, on obtient $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Le théorème des "gendarmes " permet de conclure.
4. "Faux " ; exemple $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. "Vrai " : il suffit de faire le calcul.
6. "Vrai " : associativité du barycentre :
 $G \text{ bar } \{(A, 3), (B, -2), (C, 1)\} = \text{bar}\{(I, 1), (C, 1)\}$
qui est le milieu de [IC].
7. "Faux " : $\|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1 \iff \|2\overrightarrow{MG}\| = 1 \iff GM = \frac{1}{2}$. Le rayon du cercle n'est pas 1.
8. "Faux " : tous les points M appartenant au cercle de diamètre [AB] vérifient la relation (y compris A et B).

EXERCICE 2**3 points**

1. $p(T_1) = 0,7$. Sur les 30% ne passant pas le premier test 65% soit une probabilité de $0,30 \times 0,65 = 0,195$.
Donc $p(C) = 0,7 + 0,195 = 0,895$.
2. Les écrans passant le premier test procurent un "gain " de $a - 1000$; ceux passant le second test un "gain " de $a - 1050$ et les autres un "gain " de -1000 .
- a. D'où la loi de probabilité :

	1 ^{er} test	2 ^e test	refusés
$p(X = x_i)$	0,7	0,195	0,105
"gain "	$a - 1000$	$a - 1050$	-1050

- b. $E(X) = 0,7 \times (a - 1000) + 0,195 \times (a - 1050) + 0,105 \times (-1050)$
 $E(X) = 0,895a - 1015$.
- c. L'entreprise peut espérer un bénéfice si l'espérance de gain est positive, soit
 $E(X) \geq 0 \iff a \geq \frac{1015}{0,895} \approx 1134,08 \text{ €}$. (à un centime près par excès)

EXERCICE 3

8 points

Partie A

$$1. [(2-t)e^t]' = -e^t + (2-t)e^t = (1-t)e^t.$$

$$u_1 = \int_0^1 (1-t)e^t dt.$$

D'après la question précédente $u_1 = [2-t)e^t]_0^1 = e - 2$.

$$2. u_{n+1} = \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt.$$

$$\text{En posant } \begin{array}{ll} u(t) = (1-t)^{n+1} & dv = e^t \\ du = -(n+1)(1-t)^n & v = e^t \end{array}$$

Toutes ces fonctions étant continues et dérivables, en intégrant par parties :

$$u_{n+1} = [(1-t)^{n+1}e^t]_0^1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = -1 + (n+1)u_n.$$

Partie B

Il semble avec la première calculatrice que la suite (u_n) converge vers 0, mais la deuxième conduit à penser que celle-ci est divergente...

Partie C

1. On a $0 \leq t \leq 1$, donc $1-t \geq 0$, $(1-t)^n \geq 0$ et $1 \leq e^t \leq e$. Donc $(1-t)^n e^t \geq 0$. Conclusion l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$ est positive et $u_n \geq 0$.

2. a. On a vu que $0 \leq t \leq 1 \iff e^t \leq e \iff (1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$.

b. En "intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[0; 1]$ ", on a

$$u_n \leq \int_0^1 e \times (1-t)^n \iff u_n \leq \frac{e}{n+1} [-(1-t)^{n+1}]_0^1 \text{ et finalement :}$$

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

3. On a donc démontré au 1. et au 2. b. que :

$$0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Par application du théorème des "gendarmes", la limite de u_n au voisinage de plus l'infini est égale à zéro.

Partie D

1. • Initialisation : $v_1 = u_1 + 1!(a+2-e) = e-2 + a+2-e = a$ qui est vraie.

• Hérédité : supposons la relation vraie au rang n , soit $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$.

Calculons $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1 = (n+1)[u_n + (n!)(a+2-e)] - 1 = u_{n+1} + 1 + (n+1)!(a+2-e) - 1 = u_{n+1} + (n+1)!(a+2-e)$ qui démontre l'hérédité.

2. On rappelle que $u_n \geq 0$.

- Si $a+2-e > 0 \iff a > e-2$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)(a+2-e) = +\infty$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- Si $a+2-e < 0 \iff a < e-2$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)(a+2-e) = -\infty$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

- Si $a+2-e = 0 \iff a = e-2$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n!)(a+2-e) = 0$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

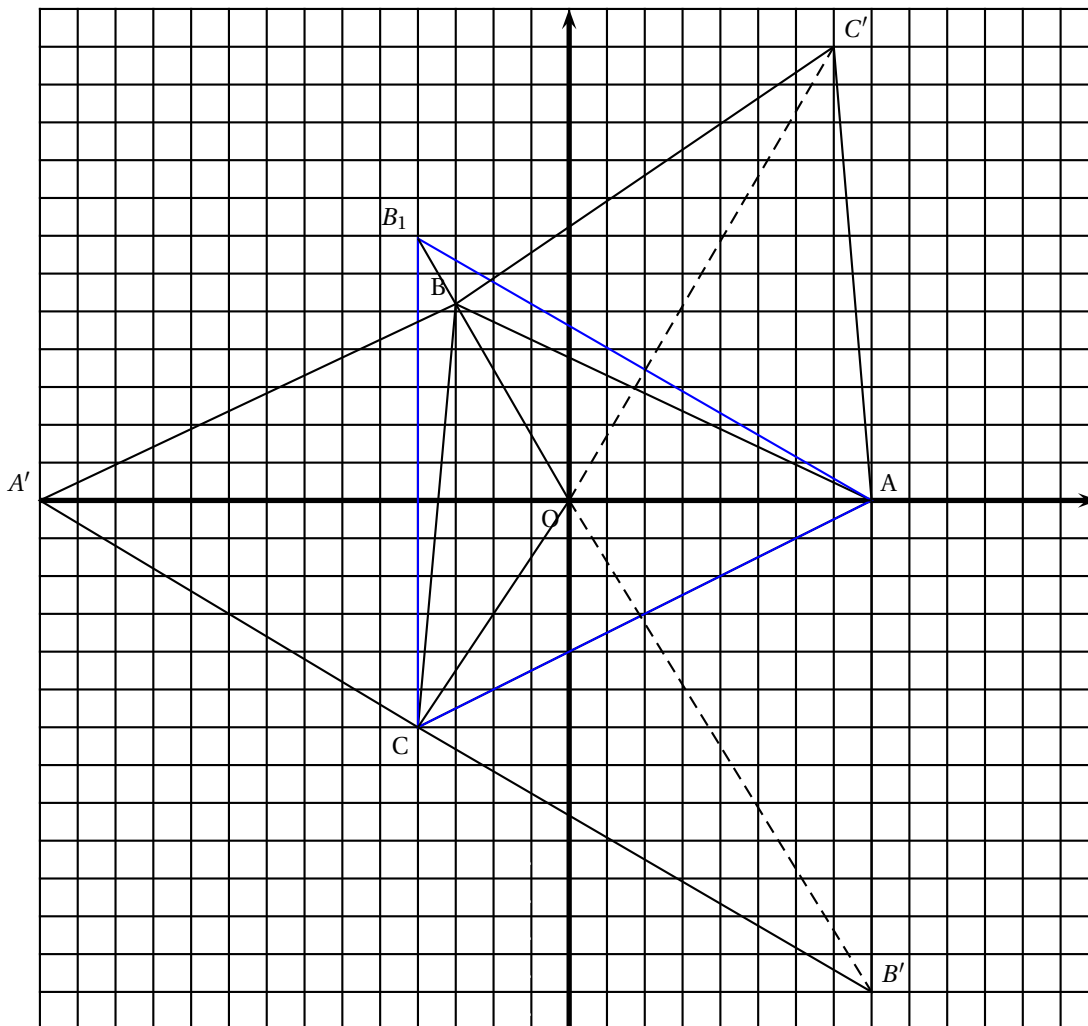
3. L'explication de la divergence des résultats des deux calculatrices provient sûrement de la valeur initiale de e -2.

On a $e \approx 2,7182818284590$. On ne connaît pas la douzième décimale de la première calculatrice, mais il y a toutes les raisons de penser que c'est 9 alors que la onzième décimale de la deuxième calculatrice est fautive (6 au lieu de 5), d'où la divergence vers $+\infty$ car on est dans le premier cas de la question 2..

EXERCICE 4

5 points

1. Figure



2. On a $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a. On sait que $a' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - c) \iff a' = 8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 8\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -4 + 4i\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + 7\sqrt{3}) = -4 - 4i\sqrt{3} + \frac{1}{2} - \frac{21}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = -4 - 10 = -14$.

b. De même $b' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a) \iff b' = 8 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4 - 4i\sqrt{3} - 8) = 8 - 6 + 6 - 2i\sqrt{3} - 6i\sqrt{3} = 8 - 8i\sqrt{3} = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On en déduit que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{OB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OB'}) = -\arg b + \arg b' = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\pi \quad [2\pi]$.

Cette égalité montre que les points O, B et B' sont alignés.

c. En admettant que $c' = 7 + 7i\sqrt{3} = 7\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On démontre de même qu'au b. que

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}) = \pi$$

qui démontre que O, C et C' sont alignés.

Autre méthode : $C(-4; -4i\sqrt{3})$ et $C'(7; -7i\sqrt{3})$. On a de façon évidente $\overrightarrow{OC'} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{OC}$ qui montre que C' appartient à la droite (OC).

Enfin les affixes de A et A' sont réelles, donc ces points sont alignés avec O.

Conclusion : les droites (AA'), (BB') et (CC') contenant toutes le point O sont concourantes en ce point.

3. a. $OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 8 + 6 + 8 = 22$.

b. $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$.

$$1 + j + j^2$$

Méthode 1 : soit B_1 le point d'affixe $8j$. Les points A, B_1 et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 8.

Le triangle AB_1C est un triangle équilatéral (trois angles inscrits de $\frac{\pi}{3}$). Le point O est le centre de gravité

de ce triangle, donc l'isobarycentre. L'égalité $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ se traduit en affixes par : $1 + j + j^2 = 0$.

Méthode 2 : $j(1 + j + j^2) = j + j^2 + j^3 = j + j^2 + 1$.

Or $j(1 + j + j^2) = 1 + j + j^2 \iff (1 + j + j^2)(j - 1) = 0$. Comme $j \neq 1$ il en résulte que $1 + j + j^2 = 0$.

Méthode 3 : $1 + j + j^2 = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

c. $|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| = |a - z + bj^2 - zj^2 + cj - zj| = |a + bj^2 + cj - z(1 + j + j^2)| = |a + bj^2 + cj|$ (d'après la question précédente.)

Or $|a + bj^2 + cj| = |8 + 6jj^2 + 8j^2j| = |8 + 6 + 8| = |22| = 22$.

d. D'après l'inégalité triangulaire admise :

$$|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| \leq |a - z| + |(b - z)j^2| + |(c - z)j|.$$

Or $|(b - z)j^2| = |b - z|$ et $|(c - z)j| = |c - z|$.

Donc $|(a - z) + (b - z)j^2 + (c - z)j| \leq MA + MB + MC$ soit d'après c.

$$22 \leq MA + MB + MC.$$

D'après a. $OA + OB + OC = 22$. Donc la valeur minimale de $MA + MB + MC$ est atteinte quand $M = O$.

EXERCICE 4 (SPÉCIALITÉ)

5 points

1. a. L'algorithme d'Euclide donne :

$$226 = 2 \times 109 + 8, \quad 109 = 13 \times 8 + 5, \quad 8 = 1 \times 5 + 3 \\ 5 = 1 \times 3 + 2, \quad 3 = 1 \times 2 + 1, \quad 2 = 2 \times 1 + 0.$$

Le dernier reste non nul étant égal à 1 le pgcd de 109 et 226 est égal à 1. 109 et 226 sont premiers entre eux et l'équation (E) admet au moins une solution.

- b. En remontant les égalités du a. :

$$3 = 1 \times 2 + 1 \iff 1 = 3 - 1 \times 2 \iff 1 = 3 - 1 \times (5 - 3) \iff 1 = 2 \times 3 - 5 \\ \iff 1 = 2(8 - 5) - 5 \iff 1 = 2 \times 8 - 3 \times 5 \\ \iff 1 = 2 \times 8 - 3(109 - 13 \times 8) \iff 1 = 41 \times 8 - 3 \times 109 \\ \iff 1 = 41 \times (226 - 2 \times 109) - 3 \times 109 \iff 1 = 41 \times 226 - 85 \times 109.$$

Donc le couple $(-85; -41)$ est une solution particulière de l'équation (E).

On a $(x; y)$ étant un couple solution quelconque de (E)

$$\begin{cases} 109x - 226y = 1 \\ 109 \times (-85) - 226 \times (-41) = 1 \end{cases} \implies 109(x + 85) - 226(y + 41) = 0 \iff 109(x + 85) = 226(y + 41) \quad (1).$$

D'après le a. 109 divise $226(y + 41)$, mais étant premier avec 226 divise $y + 41$ (d'après le théorème de Gauss); il existe donc un entier k' tel que : $y + 41 = 109k' \iff y = -41 + 109k'$ et en reportant dans (1)

$$109(x + 85) = 226 \times 109k' \iff x + 85 = 226k' \iff x = -85 + 226k'.$$

En posant $k = k' + 1$, on obtient $x = -85 + 226 + 226k = 141 + 226k$ et $y = -41 + 109 + 109k = 68 + 109k$.

$$\text{Inversement } 109(141 + 226k) - 226(68 + 109k) = 109 \times 141 - 226 \times 68 = 1 \quad (2).$$

Conclusion : les couples solutions de l'équation (E) sont les couples d'entiers $(141 + 226k; 68 + 109k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Si } x = d \text{ avec } 0 < d \leq 226 \text{ il existe un entier } k \text{ tel que } 0 < 141 + 226k \leq 226 \iff -141 < 226k < 85 \iff \\ -\frac{141}{226} < k \leq \frac{85}{226}.$$

$$\text{Or } -\frac{141}{226} \approx -0,6 \text{ et } \frac{85}{226} \approx 0,4. \text{ Conclusion } k = 0. \text{ Donc } d = 141 \text{ et par conséquent } e = 68.$$

2. Ni 2, ni 3, ni 5, ni 7, ni 11, ni 13, ni 17 ne divisent 227 et
- $17^2 > 227$
- . Donc 227 est un naturel premier.

3. On a
- $A = \{a \in \mathbb{N} : 0 \leq a \leq 226\}$
- .

Par définition de f , $a^{109} \equiv f(a) \pmod{227}$ et par définition de g , $a^{141} \equiv g(a) \pmod{227}$.

- a. On a bien sûr
- $f(0) = 0$
- et
- $g(0) = 0$
- . Donc
- $g[f(0)] = g(0) = 0$
- .

- b. D'après le petit théorème de Fermat et 227 étant premier,
- $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$
- .

- c. On sait déjà que
- $g[f(0)] = 0$
- .

$$\text{Si } a \neq 0, \quad g[f(a)] \equiv [f(a)]^{141} \pmod{227} \text{ ou encore } [g[f(a)]] \equiv (a^{109})^{141} \pmod{227}, \text{ soit } [g[f(a)]] \equiv (a^{109 \times 141}) \pmod{227}.$$

Or d'après la vérification (2) ci-dessus on a $109 \times 141 = 1 + 226 \times 68$.

$$\text{Donc } [g[f(a)]] \equiv a^{1+226 \times 68} \pmod{227} \iff [g[f(a)]] \equiv a \times a^{226 \times 68} \pmod{227} \iff [g[f(a)]] \equiv a \times (a^{226})^{68} \pmod{227}.$$

Mais d'après le b. $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$.

Donc finalement $g[f(a)] \equiv a \pmod{227}$. Finalement dans tous les cas, $g[f(a)] = a$ si $a \in A$.

La même démonstration permet de montrer que $f[g(a)] = a$.