

Baccalauréat S Asie juin 2005

EXERCICE 1

3 points

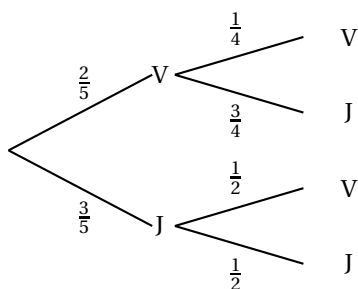
Commun à tous les candidats

1. Pour $t = 1$, on obtient bien le triplet $(3 ; 1 ; -4)$: affirmation C
2. $\vec{u}(2 ; -1 ; -1)$ est un vecteur directeur évident, donc $-\vec{u}(-2 ; 1 ; 1)$ en est aussi un : affirmation B.
3. $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \iff 1 + 2t + 4 - 2t + 9 + 3t = 0 \iff 14 = 3t \iff t = \frac{14}{3}$. Il existe donc un seul point commun : affirmation C.
4. Le triplet $(1 ; 3 ; 2)$ vérifie $x + 2y - 3z - 1 = 0$: affirmation B.
5. Un vecteur normal à \mathcal{Q}_ϵ est le vecteur $\vec{v}_2(4 ; -5 ; 2)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$: affirmation B.
6. On a $d(T, \mathcal{P}) = \frac{|-1 - 6 - 6 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$: affirmation A

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats



1.
 - a. On a en suivant la branche supérieure $p(V) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.
De même $p(J) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.
 - b. En tournant la roue, la probabilité de gagner 20 € est $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$, celle de gagner 100 € est donc $\frac{1}{8}$; par différence la probabilité d'être remboursé(e) est $\frac{5}{8}$.
On a donc $p_R(V) = \frac{5}{8}$.
Or $p_R(V) = \frac{p(V \cap R)}{p(V)} \iff \frac{5}{8} = \frac{p(V \cap R)}{\frac{1}{10}} \iff p(V \cap R) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{80}$.
 - c. On a $p(R) = p(J) + p(V \cap R) = \frac{3}{10} + \frac{5}{80} = \frac{29}{80}$.
 - d. $p(100) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$; $p(20) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$.
2.
 - a. X peut prendre les valeurs : $-m$; $100 - m$; $20 - m$; 0 .
 - b.

x_i	$-m$	$100 - m$	$20 - m$	0
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{29}{80}$

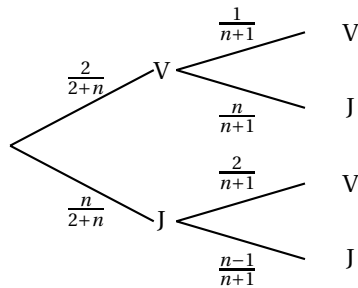
c. On a $E(X) = \sum_{i=1}^4 p_i \times x_i = -\frac{6m}{10} + \frac{100-m}{80} + \frac{20-m}{40} + 0 = \frac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur ne perdra pas d'argent si $E(X) < 0 \iff \frac{140-51m}{80} < 0 \iff m > \frac{140}{51}$. Donc il faut que m soit au moins fixé à 3 euros.

3. On reconnaît une expérience de Bernoulli avec $p = \frac{4}{10}$ et $n = 4$.

La probabilité de ne pas perdre est égale à $\left(\frac{4}{10}\right)^4$, donc la probabilité de perdre au moins une fois est $1 - \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 1 - 0,0256 = 0,9744$.

4. On obtient un nouvel arbre de probabilités :



On doit avoir $\frac{2n}{(n+1)(n+2)} + \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2} \iff n^2 - 5n + 2 \geq 0$. Le trinôme $n^2 - 5n + 2$ a pour racines $n_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \approx 4,56$ et $n_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \approx 0,44$. Il faut donc qu'il y ait plus de 4 boules jaunes.

EXERCICE 3

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

I.

1. On a $i^3 + (-8+i) \times i^2 + (17-8i) \times i = i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0 \iff i$ est solution de (E).
2. En développant le second membre et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient le système :

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ ai + b & = & -8 + i \\ bi + c & = & 17 - 8i \\ ic & = & 17i \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & -8 \\ c & = & 17 \end{cases}$$

On a donc pour tout complexe z , $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)((z^2 - 8z + 17))$.

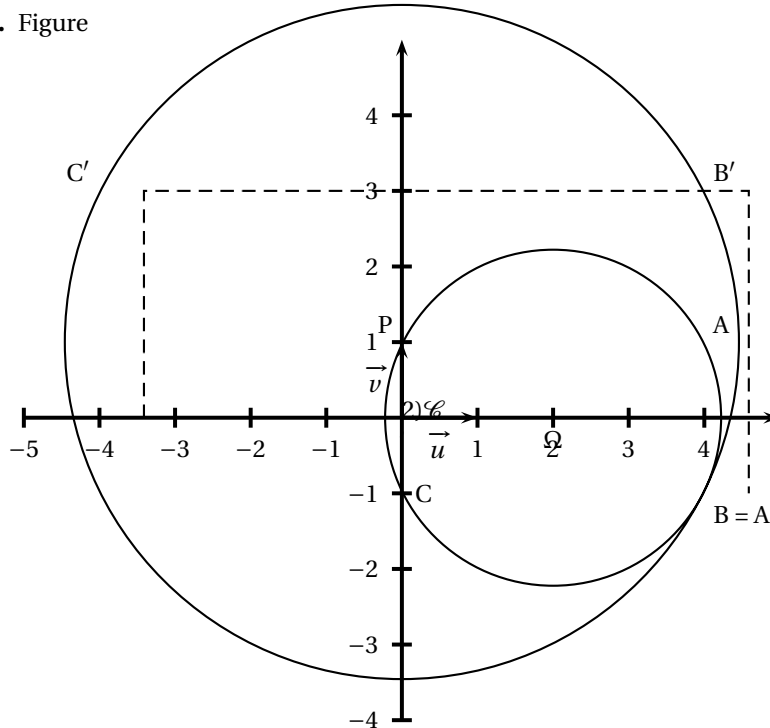
3. On a donc (E) $\iff (z+i)((z^2 - 8z + 17)) = 0 \iff \begin{cases} z+i & = & 0 \\ z^2 - 8z + 17 & = & 0 \end{cases}$.

On trouve aussitôt que :

$$S = \{-i; 4+i; 4-i\}$$

II.

1. Figure



2. L'écriture complexe de la rotation est : $z' - 2 = i(z - 2)$. Donc $z_S - 2 = i(4 + i - 2) \iff z_S = 2 + 2i - 1 = 1 + 2i$.

3. D'après la question précédente : $\Omega S = \Omega A$.
 A et B sont symétriques autour de (Ox) , et $\Omega \in (Ox)$, donc $\Omega A = \Omega B$; enfin B et C ayant la même ordonnée, Ω appartient à la médiatrice de $[BC]$ et $\Omega B = \Omega C$.
 Conclusion B, A, S et C appartiennent à un cercle \mathcal{C} de centre Ω .
 Le rayon est égal à $\Omega C = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

4. a. D'après la définition algébrique $z_{A'} = \frac{i(4+i) + 10 - 2i}{4+i-2} = \frac{9+2i}{2+i} = \frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{20-5i}{5} = 4-i = z_B$.
 $z_{B'} = \frac{i(4-i) + 10 - 2i}{4-i-2} = \frac{11+2i}{2-i} = \frac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{20+15i}{5} = 4+3i$.
 $z_{C'} = \frac{i(-i) + 10 - 2i}{-i-2} = \frac{11-2i}{-2-i} = \frac{(11-2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-20+15i}{5} = -4+3i = z_{B'}$.

b. $z'_{A'} = 4 - i$, $z'_{B'} = -4 + 3i$, $z'_{C'} = -4 + 3i$.

c. $PA' = |4 - i - i| = |4 - 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
 $PB' = |4 + 3i - i| = |4 + 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
 $PC' = |-4 + 3i - i| = |4 + 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
 Donc A' , B' et C' appartiennent au cercle \mathcal{S}' de centre P et de rayon $\sqrt{5}$.

d. On a $z' = \frac{i(z-2) + 10}{z-2} = i + \frac{10}{z-2} \iff z' - i = \frac{10}{z-2}$ et en prenant les modules $|z' - i| = \frac{10}{|z-2|}$. Donc géométriquement $PM' = \frac{10}{PM}$.

e. Si $M \in \mathcal{C} \implies \Omega M = \sqrt{5}$. D'après la question précédente $|z' - i| = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

f. Géométriquement la dernière relation signifie : $PM' = 2\sqrt{5} \iff$ les points M' appartiennent au cercle \mathcal{C}' .

Remarque : $M \in \mathcal{C} \implies z = 2 + \sqrt{5}e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$. Après calcul on en déduit que $z' = i + 2\sqrt{5}e^{-i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$.

En prenant les modules on trouve bien que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

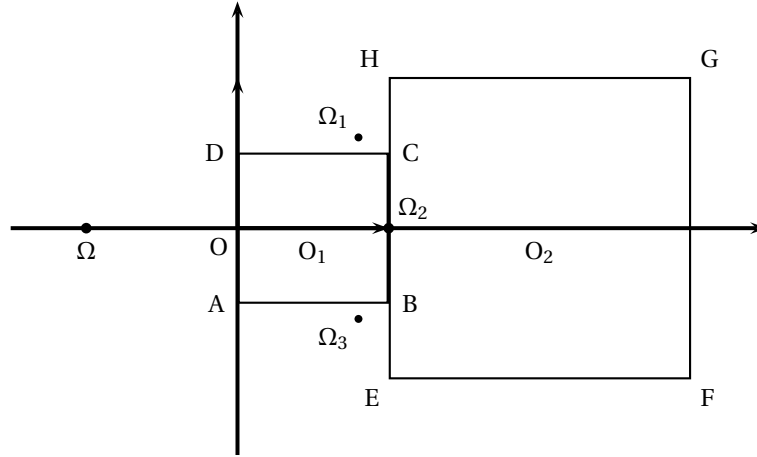
g. Conclusion : l'image du cercle \mathcal{C} est donc **tout** le cercle \mathcal{C}' .

EXERCICE 3

5 points

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. Figure.



2. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$ se traduit par $z' + 1 = 2(z + 1) \iff z' = 2z + 1$.

$$z'_{A'} = 2z_A + 1 = 2 \times \left(-\frac{i}{2}\right) + 1 = 1 - i = z_E.$$

$$z'_{B'} = 2z_B + 1 = 2 \times \left(1 - \frac{i}{2}\right) + 1 = 3 - i = z_F.$$

$$z'_{C'} = 2z_C + 1 = 2 \times \left(1 + \frac{i}{2}\right) + 1 = 3 + i = z_G.$$

$$z'_{D'} = 2z_D + 1 = 2 \times \left(\frac{i}{2}\right) + 1 = 1 + i = z_H.$$

L'image de S_1 par h est donc S_2 .

3. $g = h^{-1} \circ s$.

a. La similitude s transformant le carré de côté 1 en le carré de côté 2, le rapport de la similitude est égal à 2.

b. h^{-1} est l'homothétie de centre Ω de rapport $\frac{1}{2}$; la composée g est donc une similitude directe de rapport 1, donc une isométrie. S_1 a pour image par s S_2 qui lui-même a pour image par h^{-1} , S_1 . Conclusion g laisse S_1 globalement invariante.

c. S_1 étant invariant, son centre l'est également : $g(O_1) = O_1$.

d. Les isométries du carré sont :

- l'identité;
- la rotation r_1 de centre O_1 d'angle $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$;
- la rotation r_2 de centre O_1 d'angle π $[2\pi]$ (symétrie autour de O_1);
- la rotation r_3 de centre O_1 d'angle $-\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

e. On a $s = h \circ g$. Il y a donc quatre similitudes qui transforment S_1 en S_2 :

- l'homothétie h ;
- la composée de h avec r_1 ;
- la composée de h avec r_2 ;
- la composée de h avec r_3 ;

4. Écritures complexes de ces isométries :

a. - $h \circ r_1$:

$$\text{L'écriture complexe de } r_1 \text{ est } z' - \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \iff z' = iz - \frac{i}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\text{celle de } h \circ r_1 \text{ est donc : } z' = 2iz - i + 2.$$

- $h \circ r_2$:

L'écriture complexe de r_2 est $z' - \frac{1}{2} = e^{i\pi} \left(z - \frac{1}{2} \right) \iff z' = -z + 1$; celle de $h \circ r_2$ est donc $z' = -2z + 3$;

- $h \circ r_3$:

L'écriture complexe de r_3 est $z' - \frac{1}{2} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \iff z' = -iz + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}$; celle de $h \circ r_3$ est donc $z' = -2iz + i + 2$.

b. Les centres de ces similitudes sont les points invariants :

- Centre Ω_1 de $h \circ r_1$. Son affixe ω_1 est solution de $z = 2iz - i + 2 \iff z = \omega_1 = \frac{4 + 3i}{5}$.

- Centre Ω_2 de $h \circ r_2$. Son affixe ω_2 est solution de $z = -2z + 3 \iff z = \omega_2 = 1$.

- Centre Ω_3 de $h \circ r_3$. Son affixe ω_3 est solution de $z = -2iz + i + 2 \iff z = \omega_3 = \frac{4 - 3i}{5}$.

EXERCICE 4

7 points

Commun à tous les candidats

1. Si $n = 1$, $I_1 = \int_0^2 (2-x)e^x dx$. On intègre par parties :

$u(x) = 2-x$ $v'(x) = e^x$
 $u'(x) = -1$ $v(x) = e^x$. Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées continues sur l'intervalle $[0; 2]$, donc :

$$I_1 = [(2-x)e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = -2 + [e^x]_0^2 = -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3.$$

2. On a les équivalences $0 \leq x \leq 2 \iff -2 \leq -x \leq 0 \iff 0 \leq 2-x \leq 2 \iff 0 \leq (2-x)^n \leq 2^n \iff 0 \leq (2-x)^n e^n \leq 2^n e^n \iff 0 \leq \frac{1}{n!} (2-x)^n e^n \leq \frac{1}{n!} 2^n e^n$.

On en déduit l'ordre des intégrales suivantes :

$$\int_0^2 0 dx \leq \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^n dx \leq \int_0^2 \frac{1}{n!} 2^n e^n dx \iff 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \times 2^n [e^x]_0^2 \iff 0 \leq I_n \leq \frac{2^n (e^2 - 1)}{n!}.$$

3. On a $I_{n+1} = \int_0^2 \frac{1}{(n+1)!} (2-x)^{n+1} e^x dx$.

Intégrons par parties en posant :

$$u(x) = (2-x)^{n+1} \quad v'(x) = e^x \\ u'(x) = -(n+1)(2-x)^n \quad v(x) = e^x.$$

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées continues sur l'intervalle $[0; 2]$, donc :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left([(2-x)^{n+1} e^x]_0^2 - \int_0^2 -(n+1)(2-x)^n e^x dx \right) = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^2 (2-x)^n e^x dx = -\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n.$$

4. Démontrons la relation par récurrence :

• Initialisation : $e^2 - 1 = 2 + I_1 \iff I_1 = e^2 - 3$: vrai ;

Hérédité : supposons que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$. D'après la question précédente, on peut écrire : $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$ qui est bien la relation demandée au rang $n+1$. L'égalité est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 1.

5. a. Quel que soit le naturel n , $u_n > 0$. Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$.

$$\text{Or } n \geq 3 \iff n+1 \geq 4 \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \iff \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Conclusion : si $n \geq 3$, alors $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

- b.** En écrivant toutes les inégalités précédentes de 3 à n et en multipliant membres à membres (tous les termes sont supérieurs à zéro) on obtient :

$$0 \leq u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}.$$

- c.** On a $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$. Donc d'après l'encadrement trouvé à la question b. on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

On a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$; donc d'après l'encadrement démontré à la question 2. on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

- d.** En reprenant l'égalité obtenue à la question 4. et par limite on obtient que :

$$e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right).$$