

Exercice I :

1. Le triangle ABC est *rectangle et pas isocèle* car :

$$AB = |-3 - i - (-2 + 3i)| = |-1 - 4i| = \sqrt{17}$$

$$AC = |2,08 + 1,98i - (-2 + 3i)| = |4,08 - 1,02i| = \sqrt{17,6868}$$

$$BC = |2,08 + 1,98i - (-3 - i)| = |5,08 + 2,98i| = \sqrt{34,6868}$$

$$\text{Alors } BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est *une droite*, c'est la médiatrice de $[AB]$ avec A et B d'affixes : -2 et $4i$, car :

$$\begin{aligned} |z'| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{z - 4i}{z + 2} \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow |z - 4i| = |z + 2| \\ &\Leftrightarrow AM = BM \end{aligned}$$

3. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est : *une droite privée du point d'affixe -2*
En effet, en posant $z = x + iy$, on obtient :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{x + iy - 4i}{x + iy + 2} \\ &= \frac{x + i(y - 4)}{(x + 2) + iy} \\ &= \frac{(x + i(y - 4))((x + 2) - iy)}{(x + 2)^2 + y^2} \\ &= \frac{x(x + 2) + y(y - 4) + i((y - 4)(x + 2) - xy)}{(x + 2)^2 + y^2} \\ &= \frac{x(x + 2) + y(y - 4) + i(4x + 2y + 8)}{(x + 2)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Or pour que z' soit réel il faut que sa partie imaginaire soit nulle, donc $4x + 2y + 8 = 0$ avec $z \neq -2$.
Comme de plus ce point d'affixe -2 appartient à la droite d'équation $4x + 2y + 8 = 0$, alors CDFQ.

4. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est :

$$\begin{aligned} z &= e^{-\frac{\pi}{3}}(z - z_D) + z_D \\ &= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) (z - i) + i \\ &= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z - i \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \\ &= \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Exercice II :

1. f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition, et :

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Donc f est croissante sur $[0; 2]$, et comme f est continue l'image de $[1; 2]$ par f est $[f(1); f(2)] = \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right] \subset [1; 2]$, ainsi :

$$\text{si } x \in [1; 2] \text{ alors } f(x) \in [1; 2]$$

2. (a)

(b) Soit P_n la proposition de récurrence : $1 \leq v_n \leq 2$.

Comme $v_0 = 2$ alors P_0 est vraie.

Supposons P_n vraie, alors $1 \leq v_n \leq 2$, donc $1 \leq f(v_n) \leq 2$, d'après la relation démontrée à la question 1.

Ainsi si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie, mais P_0 est vraie, donc pour tout n , P_n est vraie.

Ainsi pour tout entier naturel n , $1 \leq v_n \leq 2$.

Soit Q_n la proposition de récurrence : $v_{n+1} \leq v_n$

Or $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$ donc $v_1 \leq v_0$. Donc Q_0 est vraie.

Supposons Q_n vraie, alors $v_{n+1} \leq v_n$, mais v_n et v_{n+1} sont deux nombres de $[0; 2]$, donc comme f est croissante sur $[0; 2]$, alors :

$$f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \Leftrightarrow v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

Donc Q_{n+1} est vraie.

Ainsi, si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie, mais Q_0 est vraie, donc pour tout n , Q_n est vraie.

Ainsi pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

Pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

(c)

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} \\ &= \frac{(2u_n + 1)(v_n + 1) - (2v_n + 1)(u_n + 1)}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \\ &= \frac{2u_n v_n + u_n + 2v_n + 1 - 2u_n v_n - 2u_n - v_n - 1}{(u_n + 1)(v_n + 1)} \\ &= \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \end{aligned}$$

Soit R_n la relation de récurrence : $v_n - u_n \geq 0$

Or $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$, donc R_0 est vraie.

Supposons R_n vraie, alors $v_n - u_n \geq 0$, mais :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\overbrace{v_n - u_n}^{>0}}{\underbrace{(v_n + 1)}_{>0} \underbrace{(u_n + 1)}_{>0}}$$

Donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$.

Ainsi, si R_n est vraie alors R_{n+1} est vraie, mais R_0 est vraie, donc pour tout n , R_n est vraie.

Ainsi pour tout entier naturel $v_n - u_n \geq 0$

.

Comme $1 \leq u_n \leq 2$, alors $2 \leq u_n + 1 \leq 3$ et $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{2}$.

De même, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{v_n + 1} \leq \frac{1}{2}$.

Or

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)} \Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{4}$$

(d) En procédant par récurrence, on démontre que pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \underbrace{(v_0 - u_0)}_{=1}$$

- (e) Comme la suite (u_n) est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et majorée par 2, alors u est convergente.
Comme la suite (v_n) est décroissante ($v_n \geq v_{n+1}$) et minorée par 1, alors v est convergente.

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

et comme pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$,

alors d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

u et v convergent

Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel α .

Comme f est continue, $u_{n+1} = f(u_n)$ et u converge vers α , alors :

$$\begin{aligned} \alpha = f(\alpha) &\Leftrightarrow \alpha = \frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1} \\ &\Leftrightarrow \alpha(\alpha + 1) = 2\alpha + 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Or comme $1 \leq u_n \leq 2$, $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice III :

1. (a) On a $f(x) = 2(x-1) - (x-1)e^{-x} = 2(x-1) - \frac{(x-1)}{e^x}$.

Or, pour tout polynôme P , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x-1) = +\infty$.

- (b) Comme $f(x) - (2x-2) = -\frac{(x-1)}{e^x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-2) = 0$.

Donc la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

- (c) Comme

$$\begin{aligned} f(x) \leq 2x - 2 &\Leftrightarrow -\frac{(x-1)}{e^x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -(x-1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \end{aligned}$$

Donc \mathcal{C} est au-dessous de Δ sur $[1; +\infty[$

2. (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (2 - e^{-x}) + (x-1) \times e^{-x} \\ &= 2 - e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x} \\ &= xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

- (b) Pour tout réel x strictement positif, $-x < 0$ donc $e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1$
Ainsi si $x > 0$, $1 - e^{-x} > 0$ et $xe^{-x} > 0$, alors $f'(x) > 0$.

- (c) Tableau de variations de f :

3. L'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan limité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ est puisque f est positive :

$$\int_1^3 (x-1)(2 - e^{-x}) dx = \int_1^3 2(x-1) dx + \int_1^3 (x-1)(-e^{-x}) dx = [(x-1)^2]_1^3 + \int_1^3 (x-1)(-e^{-x}) dx$$

Ainsi l'aire cherchée est en unités d'aire :

$$4 + \int_1^3 (x-1)(-e^{-x}) dx$$

Intégrons par parties cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned} u' &= -e^{-x} & u &= e^{-x} \\ v &= x-1 & v' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x-1)(-e^{-x}) dx &= [(x-1)e^{-x}]_1^3 - \int_1^3 e^{-x} dx \\ &= 2e^{-3} - [-e^{-x}]_1^3 \\ &= 2e^{-3} - (-e^{-3} + e^{-1}) \\ &= 3e^{-3} - e^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi l'aire est, en unités d'aire,

$$4 + 3e^{-3} - e^{-1}$$

soit

$$16(4 + 3e^{-3} - e^{-1}) \text{ cm}^2$$

4. (a) Pour déterminer le point A de \mathcal{C} où la tangente à \mathcal{C} est parallèle à Δ , il faut que les coefficients directeurs soient égaux, donc :

$$\begin{aligned} f'(x) = 2 &\Leftrightarrow xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}) = 2 \\ &\Leftrightarrow xe^{-x} - 2e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-x}(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Ainsi le point A de coordonnées $(2; 2 - e^{-2})$ est le point de la courbe \mathcal{C} où la tangente à \mathcal{C} est parallèle à Δ .

- (b) Comme la droite Δ a pour équation $2x - y - 2 = 0$, alors la distance de A à Δ est :

$$\frac{|2 \times 2 - (2 - e^{-2}) - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$$

Exercice IV :

1. (a) Si le dé indique 1, alors la probabilité de gagner est de $\frac{4}{10}$. Donc :

$$p_{D_1}(G) = \frac{4}{10}$$

Si le dé indique 2, alors la probabilité de gagner est de $\frac{\binom{2}{4}}{\binom{2}{10}} = \frac{2}{15}$. Donc :

$$p_{D_2}(G) = \frac{2}{15}$$

Si le dé indique 3, alors la probabilité de gagner est de $\frac{\binom{3}{4}}{\binom{3}{10}} = \frac{1}{30}$. Donc :

$$p_{D_3}(G) = \frac{1}{30}$$

- (b) Comme

$$p(G) = p(G \cap D_1) + p(G \cap D_2) + p(G \cap D_3) = p(D_1) \times p_{D_1}(G) + p(D_2) \times p_{D_2}(G) + p(D_3) \times p_{D_3}(G)$$

Alors

$$p(G) = \frac{23}{180}$$

2. Un joueur a gagné la partie. Alors la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé est

$$p_{(G)D_1} = \frac{p(D_1 \cap G)}{p(G)} = \frac{12}{23}$$

3. Un joueur fait six parties. Comme il remet les boules tirées dans l'urne après chaque partie, les parties sont considérées comme indépendantes.

Désignons par X la variable aléatoire désignant le nombre de parties gagnées sur 6 jouées. Alors puisque les parties sont indépendantes, on répète de manière indépendante la même expérience aléatoire (jouer une partie) à deux issues (gagner ou perdre). Alors X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{23}{180}$.

Ainsi la probabilité qu'il gagne exactement deux parties est :

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} \left(\frac{23}{180}\right)^2 \times \left(1 - \frac{23}{180}\right)^4 \approx 0,14$$

Pour déterminer le nombre minimal de parties qu'un joueur doit faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9, résolvons :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) \geq 0,9 &\Leftrightarrow 1 - P(X < 1) \geq 0,9 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,9 \\ &\Leftrightarrow 1 - \left(1 - \frac{23}{180}\right)^n \geq 0,9 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{157}{180}\right)^n \leq 0,1 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{157}{180}\right)^n \leq \ln 0,1 \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{157}{180}\right) \leq \ln 0,1 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)} \\ &\Leftrightarrow n \geq 16,8 \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre minimal cherché est $n = 17$.

Corrigé : Patrick Baril