Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion juin 2005

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $\dfrac{2^n}{n^{2005}} = \mathrm{e}^{n\ln 2 - 2\,005\ln n}$ a pour limite $+\infty$: elle diverge.

b. $\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{2+(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n}}{1+\frac{1}{n}} \to 2$: elle converge.

c. $n\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1$: elle converge.

d. $\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\ln n} = \frac{1}{2}\dfrac{\sqrt{n}}{\ln\sqrt{n}} \to +\infty$: elle diverge.

2. **a.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$. On ne peut pas savoir : faux

b. La suite (u_n) est minorée. Oui

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$. Pas forcément : faux

d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non. Vrai

3. **a.** La suite (u_n) converge vers 1. Non car elle est croissante et $u_1 = 2$.

b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique. Oui : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$. (raison 2)

c. La suite (v_n) est majorée. Faux : car la raison est supérieure à 1.

d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.
$w_{n+1} - w_n = \ln(u_{n+1} - 1) - \ln(u_n - 1) = \ln(2u_n - 2) - \ln(u_n - 1) = \ln 2(u_n - 1) - \ln(u_n - 1) = \ln 2 + \ln(u_n - 1) - -\ln(u_n - 1) = \ln 2$. La suite est arithmétique de raison $\ln 2$. Vrai

4.

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

a. $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{n} - \ldots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$. La suite (x_n) est décroissante : Faux

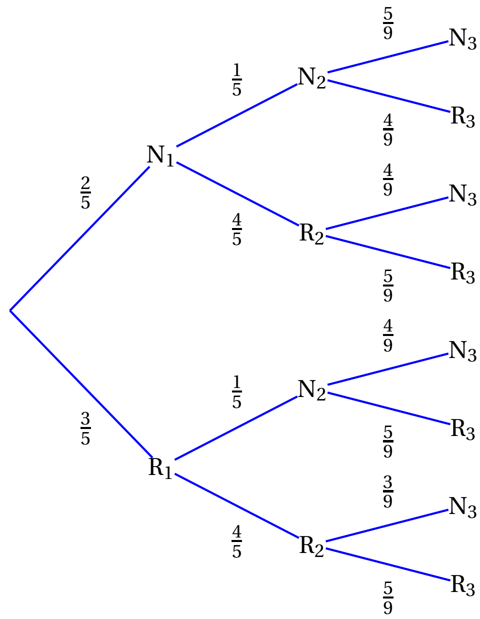
b. $x_3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{20+15+12+10}{60} = \dfrac{57}{60} = \dfrac{19}{20}$: Vrai et $y_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{15+12+10}{60} = \dfrac{37}{60}$. Vrai

c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées. Faux pour (x_n), car cette suite décroissante est majorée par son premier terme.

d. $y_{n+1} - y_n = \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \ldots + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n+1} - \ldots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$. La suite (y_n) est croissante.
Enfin $x_n - y_n = \dfrac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.
Conclusion : les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

EXERCICE 2 **5 points**

1. Arbre de probabilités :



2. **a.** En suivant la branche supérieure : $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{9} = \dfrac{2}{45}$;
$p(N_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \dfrac{32}{225}$.

b. D'après la formule des probabilités totales :
$p(N_1 \cap N_3) = p(N_1 \cap N_3 \cap N_2) + p(N_1 \cap N_3 \cap R_2) = \dfrac{2}{45} + \dfrac{32}{225} = \dfrac{14}{75}$.

c. De façon analogue $p(R_1 \cap N_3) = p(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{9} = \dfrac{16}{75}$.

3. On en déduit que $p(N_3) = p(N_3 \cap R_1) + p(N_3 \cap N_1) = \dfrac{14}{75} + \dfrac{16}{75} = \dfrac{30}{75} = \dfrac{2}{5}$.

4. $p(N_1) = \dfrac{2}{5}$ et $p(N_3) = \dfrac{2}{5}$. D'où $p(N_1) \times p(N_3) = \dfrac{4}{25} = \dfrac{12}{75}$ et $p(N_1 \cap N_3) = \dfrac{14}{75}$.
Conclusion : $p(N_1) \times p(N_3) \neq p(N_1 \cap N_3)$, donc les évènements ne sont pas indépendants.

5. Il faut calculer $p_{N_3(R_3)} = \dfrac{p(R_1 \cap N_3)}{p(N_3)} = \dfrac{\frac{16}{75}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{16}{75} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{8}{15}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

$S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démonstration par récurrence :

– Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1^3 = 1$ et $\left[\dfrac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1$.

– Hérédité : supposons qu'au rang n, $S_n = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Donc $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\dfrac{n^2}{4} + (n+1)\right] =$

$\dfrac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4n+4\right) = \dfrac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 = \left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$. La formule est vraie au rang $n+1$.

Donc pour tout $n > 0$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2. Si n est pair, alors $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

a. D'après la question précédente : $S_{2k} = \left[\dfrac{2k(2k+1)}{2}\right]^2 = k^2(2k+1)^2$ et $S_{2k+1} = \left[\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right]^2 = (k+1)^2(2k+1)^2$. Les deux sommes ont donc au moins comme diviseur commun $(2k+1)^2$.
Donc $\text{PGCD}(S_{2k} ; S_{2k+1}) = (2k+1)^2\text{PGCD}\left(k^2 ; (k+1)^2\right)$.

b. PGCD $(k ; k+1)$. Comme $(k+1)-k = 1$, on sait que tout diviseur commun à deux nombres divise n'importe quelle combinaison linéaire de ces deux nombres. Donc le PGCD$(k ; k+1)$ divise 1, donc puisque les nombres sont positifs, PGCD $(k ; k+1) = 1$.

c. Calculer PGCD$(S_{2k} ; S_{2k+1})$. On vient de voir que PGCD $(k ; k+1) = 1$, donc en utilisant la propriété admise au début, PGCD $(k^2 ; (k+1)^2) = 1$.
Donc en reprenant le résultat de **2. a.**, PGCD$(S_{2k} ; S_{2k+1}) = (2k+1)^2$.

3. Si n est impair, alors $n = 2k+1$.

a. Tout diviseur de $2k+1$ et $2k+3$ est un diviseur de leur différence 2. Donc les seuls diviseurs de $2k+1$ et $2k+3$ sont 1 ou 2. Or ces deux nombres sont impairs : le seul diviseur possible est 1.
PGCD$(2k+1;2k+3) = 1$. Ces deux nombres sont premiers entre eux.

b. De façon anlogue à la résolutiton précédente : $S_{2k+1} = (k+1)^2(2k+1)^2$ et $S_{2k+2} = (k+1)^2(2k+3)^2$.
Donc $\text{PGCD}(S_{2k+1} ; S_{2k+2}) = (k+1)^2\text{PGCD}\left((2k+1)^2 ; (2k+3)^2\right)$.
Or PGCD$(2k+1;2k+3) = 1$ implique que PGCD$((2k+1)^2;(2k+3)^2) = 1$.
Donc finalement : PGCD$(S_{2k+1} ; S_{2k+2}) = (k+1)^2$.

4. Si $n = 2k$ le PGCD $(k+1)^2 = 1 \iff k = 0$. Ceci est impossible puisque S_0 n'existe pas.
Si $n = 2k+1$ le PGCD $(k+1)^2 = 1 \iff k = 0$: il existe donc un seul couple solution $(S_1 ; S_2)$ ou encore les entiers 1 et 9.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

a. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$: comme le produit $f(-x)f'(x) = 1$, aucun de ces deux nombres ne peut être nul : la fonction ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$ (et le graphe ne peut avoir de tangente horizontale).

b. La fonction f étant supposée dérivable, g l'est aussi et $g'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x)$. Or $f(-x)\times f'(x) = 1$, vraie quel que soit $x \in \mathbb{R}$, donc est vraie pour la valeur $-x$, donc $f(x)\times f'(-x) = 1$.
On a donc $g'(x) = -1+1 = 0$.

c. Il en résulte que $g(x) = K (K \in \mathbb{R})$.
En particulier $g(0) = f(-0)\times f(0) = (-4)^2 = 16$. Donc $g(x) = f(-x)f(x) = 16$.

d. De $f(-x) \times f(x) = 16$ et $f(-x) \times f'(x) = 1$, on déduit que $f'(x) = \dfrac{1}{f(-x)}$ et $\dfrac{f(x)}{16} = \dfrac{1}{f(-x)}$ (car $f(-x) \neq 0$.

En comparant les deux égalités on obtient : $f'(x) = \dfrac{1}{16}f(x)$ qui signifie que f est une solution de l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. De plus la condition initale montre que $f(0) = -4$.

2. Question de cours

a. Classique

b. Si y est une solution de l'équation différentielle (E), $y = K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ et la condition iniale $y(0) = -4$ entraîne $y(0) = K = -4$.
Finalement $y(x) = -4\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$.

3. D'après la question **1.** $f(0) = -4$ et f est solution de (E).
D'après la question **2.** $f(x) = -4\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$.
On peut calculer $f'(x) = -4 \times \dfrac{1}{16}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}} = -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$.
On vérifie que $f(-x) \times f'(x) = -4\mathrm{e}^{\frac{-x}{16}} \times -\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{16}} = 1$ et $f(0) = -4$. Conclusion : $f(x) = -4\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est l'unique fonction de vérifiant les conditions (C).

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

- La droite (AH) est perpendiculaire au plan (BCD) donc orthogonale à toute droite de ce plan,en particulier la droite (CD) :
- De même la hauteur issue de B est perpendiculaire au plan (ACD) donc est orthogonale à la droite (CD) ;
- Conclusion : la droite (CD) est orthogonale aux deux hauteurs issues de A et B qui sont par hypothèse sécantes; la droite (CD) est donc orthogonale au plan déterminé par ces deux hauteurs c'est-à-dire le plan (ABH) : elle est en particulier perpendiculaire à la droite (BH).
  La droite (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle (BCD).

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points A(3 ; 2 ; −1), B(−6 ; 1 ; 1), C(4 ; −3 ; 3) et D(−1 ; −5 ; −1).

1. a. On calcule que les coordonnées de B, C et D vérifient l'équation proposée :
$-2 \times (-6) - 3 \times 1 + 4 \times 1 - 13 = 0$;
$-2 \times 4 - 3 \times (-3) + 4 \times (3) - 13 = 0$;
$-2 \times (-1) - 3 \times (-5) + 4 \times (-1) - 13 = 0$.
On a donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \text{(BCD)} \iff -2x - 3y + 4z - 13 = 0$.

b. On traduit que H$(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan (BCD) et que le vecteur $\overrightarrow{\text{BH}}$ est normal au plan c'est-à-dire colinéaire au vecteur $\vec{n}\,(-2\,;\,-3\,;\,4)$. Soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x - 3y + 4z - 13 & = & 0 \\ x - 3 & = & -2\alpha \\ y - 2 & = & -3\alpha \\ z + 1 & = & = 4\alpha \end{array}\right. \Rightarrow$$

$-2(3-2\alpha)-3(2-3\alpha)+4(-1+4\alpha)-13=0 \iff 29\alpha=29 \iff \alpha=1$.
On en déduit que H$(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$.

c. $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}-5\\-2\\-4\end{pmatrix}$.D'où $\overrightarrow{\text{BH}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}} = 7\times(-5)+(-2)\times(-2)+2\times(-4) = -35+4-8=-39$.

d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ? S'il l'était, d'après la partie les hauteurs issues de A et de B seraient sécantes et le produit scalaire $\overrightarrow{\text{BH}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}}$ serait nul : or on vient de voir qu'il ne l'est pas.
Conclusion : ABCD n'est pas orthocentrique.

2. Les droites (IO), JO) et (KO) sont trois hauteurs de ce tétraèdre. Elles concourent en O qui appartient à la quatrième hauteur.
Les quatre hauteurs sont concourantes, donc le tétraèdre OIJK est orthocentrique.

EXERCICE 5 **3 points**
Commun à tous les candidats

1. – Pour $\mathscr{C}_f : f'(x)=\dfrac{1}{x+1},\ f'(0)=1$.
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O est : $y-0=1(x-0) \iff y=x$.
– Pour $\mathscr{C}_g : g'(x)=\text{e}^x,\ g'(0)=1$.
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point O est : $y-0=1(x-0) \iff y=x$.
Conclusion : $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont en O une tangente comune : la droite d'équation $y=x$.

2. Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de $\mathscr{C}_f$. On a donc $y=\ln(x+1)$.
Son symétrique M' autour de la droite d'équation $y=x$ a pour coordonnées $(y\ ;\ x)$ ou encore $(\ln(x+1)\ ;\ x)$.
Posons $Y=x>0$ et $X=\ln(x+1)=\ln(Y+1) \iff \text{e}^X=\text{e}^{\ln(Y+1)} \iff \text{e}^X = Y+1 \iff Y=\text{e}^X-1$.
Conclusion M' appartient à $\mathscr{C}_g$.
Donc les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.

3. $I(a)=\displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,\text{d}x$.

a. $I(a)$ est l'aire du domaine plan limité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $y=0$ et $y=a$. Si A_1 est le point de $\mathscr{C}_f$ d'absisse a, son symétrique autour de $y=x$ est le point $\text{M}_2(\ln(1+a)\ ;\ a).DemêmeA$(a ; 0) a pour symétrique $\text{A}'(0\ ;\ a)$. Le domaine dont l'aire est $I(a)$ a pour symétrique le domaine limité par l'axe des ordonnées, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $y=0$ et $y=a$.
Or l'aire de ce domaine est la différence entre l'aire du rectangle construit sur les points O, A′ et M′ et l'aire du domaine situé sous l'arc $\overset{\frown}{\text{OM}'}$, c'est-à-dire l'intégrale de la fonction g entre 0 et $f(a)\ln(a+1)$.
Donc
$$I(a)=a\ln(a+1)-\int_0^{\ln(a+1)}\left(\text{e}^x-1\right)\text{d}x.$$

b. On a donc $I(a)=a\ln(a+1)-[\text{e}^x-x]_0^{\ln(a+1)} =$
$a\ln(a+1)-\text{e}^{\ln(a+1)}+\ln(a+1)+1 = a\ln(a+1)-a-1+\ln(a+1)-1 = (a+1\ln(a+1)-a$.

c. On effectue une intégration par parties. On pose :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \ln(x+1) \\ v'(x) & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \dfrac{1}{x+1} \\ v(x) & = & x \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées sont continues sur $[0~;~a]$

$I(a) = [(x+1)\ln(x+1)]_0^a - \displaystyle\int_0^a \frac{1}{x+1} \times (x+1)\,\mathrm{d}x = (a+1)\ln(a+1) - a.$

On retrouve (heureusement) le même résultat

ANNEXE

À rendre avec la copie

Courbes de l'exercice 5