

Durée : 4 heures

Baccalauréat S spécialité septembre 2003

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit s un nombre réel.

On donne les points A (8 ; 0 ; 8), B (10 ; 3 ; 10) ainsi que la droite \mathcal{D} d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -5 + 3s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2s \end{cases}$$

- Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ définie par A et B.
 - Démontrer que \mathcal{D} et Δ sont non coplanaires.
- Le plan \mathcal{P} est parallèle à \mathcal{D} et contient Δ . Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{P} . Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{P} .
 - Montrer que la distance d'un point quelconque M de \mathcal{D} à \mathcal{P} est indépendante de M .
 - Donner un système d'équations paramétriques de la droite définie par l'intersection de \mathcal{P} avec le plan (xOy) .
- La sphère \mathcal{S} est tangente à \mathcal{P} au point C(10 ; 1 ; 6). Le centre Ω de \mathcal{S} se trouve à la distance $d = 6$ de \mathcal{P} , du même côté que O.
Donner l'équation cartésienne de \mathcal{S} .

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

- Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
- En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$, puis que n est divisible par 16.
- En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n .

4. a. Soient a , b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c .
- b. Dédurre de ce qui précède que 240 divise n .
5. Existe-t-il quinze nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier?

PROBLÈME

10 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(x) &= \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1 \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

- a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- a. Étudier la dérivabilité de f en 0.
b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, f' désignant la fonction dérivée de f .
- Étudier le sens de variations de f sur $]0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près.

Partie B

- Calculer une équation de la tangente \mathcal{D} à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse $x = 1$.
- On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
a. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ où g' et g'' désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g . Étudier le sens de variations de g' . En déduire le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$
b. Étudier le sens de variations de g .
En déduire la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la tangente \mathcal{D} .
- Construire la courbe \mathcal{C} et la tangente \mathcal{D} (unité graphique : 2 cm).

Partie C

- n est un entier naturel non nul.
Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x \, dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

2. En déduire en fonction de l'entier n , l'aire \mathcal{A}_n exprimée en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe \mathcal{C} , la tangente \mathcal{D} et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n$ et interpréter le résultat obtenu.