Durée : 4 heures

Baccalauréat S France septembre 2004

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** $g(x)=\dfrac{1}{x\left(x^2-1\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1}=$

$\dfrac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x+1)(x-1}$. En identifiant les deux écritures on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 0\\ -b+c & = & 0\\ -a & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b+c & = & 1\\ -b+c & = & 0\\ a & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & \frac{1}{2}\\ c & = & \frac{1}{2}\\ a & = & -1\end{array}\right.$$

Finalement $g(x)=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}$.

b. Une primitive G de g sur $]1\,;\,+\infty[$, donc pour $x>1>0>-1$ est $G(x)=-\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}\ln(x-1)=-\ln x+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

2. Posons $u(x)=x^2-1$, alors $u'(x)=2x$, donc une primitive de $\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{u^{-1}}{-1}=\dfrac{-1}{x^2-1}$.

3. Posons : $\left\{\begin{array}{ll} u(x)=\ln x & v'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\\ u'(x)=\dfrac{1}{x} & v(x)=\dfrac{-1}{x^2-1}\end{array}\right.$. Les fonctions étant dérivables et les dérivées continues on peut intégrer par parties :

$I=\left[\dfrac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3+\displaystyle\int_2^3\dfrac{1}{x\left(x^2-1\right)}=\left[\ln\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\dfrac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3=\ln\left(\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)-\dfrac{\ln 3}{8}-\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{\ln 2}{3}=\dfrac{3}{2}\ln 2-\ln 3-\dfrac{\ln 3}{8}-\dfrac{\ln 3}{2}+\ln 2+\dfrac{\ln 2}{3}=\left(1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\ln 2-\left(1+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}\right)\ln 3=\dfrac{17}{6}\ln 2-\dfrac{13}{8}\ln 3$.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

1. Tous les nombres étant supérieurs à zéro : $x^y=y^x \iff \ln\left(x^y\right)=\ln\left(y^x\right)\iff y\ln x=x\ln y\iff\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$.

2. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

En 0, $h(x)=\ln x\times\dfrac{1}{x}$; de $\displaystyle\lim_{x\to 0_+}\ln x=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0_+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, il en résulte par produit des limites que $\displaystyle\lim_{x\to 0_+}h(x)=-\infty$.

b. On calcule la dérivée du quotient de deux fonctions dérivables :

$h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Le signe de la dérivée est celui de $1-\ln x$.

Or $1-\ln x=0\iff x=\mathrm{e}$. La dérivée est donc positive sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}]$ (donc h est croissante sur cet intervalle) et négative sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ (donc h est décroissante sur cet intervalle).

L'extremum est obtenu lorsque la dérivée s'annule en changeant de signe ; ici on a un maximum pour $x=\mathrm{e}$ qui est égal à $f(\mathrm{e})=\dfrac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

c. On a $h(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

3. D'après la question précédente la fonction h est croissante, continue sur $]1\,;\,\mathrm{e}]$: il existe donc un réel unique $a \in]1\,;\,\mathrm{e}]$ tel que $f(a) = \lambda$.
De même, il existe un réel unique b de $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ tel que $f(b) = \lambda$.
On a donc trouvé $\dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b} = \lambda$.

4. **a.** Si $s(a) = b$, quand a vers 1, λ tend vers zéro et b tend vers plus l'infini.

b. Si a tend vers e (avec $a < \mathrm{e}$), alors λ tend vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et b tend vers e (avec $\mathrm{e} < b$).

c. Si a croît, alors b décroît : la fonction s est décroissante.

5. Les seuls entiers de l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$ sont 1 et 2. 1 ne donne pas de solution et 2 donne le couple $(2\,;\,4)$. On vérifie que $2^4 = 4^2 = 16$. C'est le seul couple d'entiers qui commutent.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

- Soit A l'évènement : « être une particule du type A » ; $p(\mathrm{A}) = 0{,}75$.
- Soit B l'évènement : « être une particule du type B » ; $p(\mathrm{B}) = 0{,}25$.

On a $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K1}) = \dfrac{1}{3}$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K2}) = \dfrac{2}{3}$; et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K1}) = \dfrac{1}{2}$, $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K2}) = \dfrac{1}{2}$.

1. $p(\mathrm{A1}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{K1}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K1}) \times p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$;
$p(\mathrm{A2}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{K2}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K2}) \times p(\mathrm{A}) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$;
$p(\mathrm{B1}) = p(\mathrm{B} \cap \mathrm{K1}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K1}) \times p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$;
$p(\mathrm{B2}) = p(\mathrm{B} \cap \mathrm{K2}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K2}) \times p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$;
$p(\mathrm{C1} = p[(\mathrm{A} \cap \mathrm{K1}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{K1})] = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$;
$p(\mathrm{C2} = p[(\mathrm{A} \cap \mathrm{K2}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{K2})] = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$;

2. On a une expérience de Bernoulli avec $n = 5$ et $p = \dfrac{5}{8}$.
On a $p(\mathrm{E}) = \binom{5}{2}\left(\dfrac{5}{8}\right)^2\left(\dfrac{3}{8}\right)^3 \approx 0{,}206$.

Partie B

1. À l'instant 0, la proportion est de 0,75 et au bout de 5 730 ans la proportion n'est plus que la moitié soit 0,375.
Soit $0{,}375 = 0{,}75\mathrm{e}^{-5730\lambda} \iff \dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-5730\lambda} \iff -5730\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \dfrac{\ln 2}{5\ 730} \approx 0{,}000\ 12$ à 10^{-5} près par défaut.

2. On cherche le temps t au bout duquel il ne reste plus que 90 % de particules soit $0{,}75\mathrm{e}^{-0{,}00012t} \approx 0{,}9 \times 0{,}75 \iff \mathrm{e}^{-0{,}00012t} \approx 0{,}9 \iff -0{,}00012t \approx \ln(0{,}9) \iff t \approx \dfrac{\ln 0{,}9}{-0{,}00012} \approx 878$ ans.

3. Même question avec 50 % :
$0{,}75\mathrm{e}^{-0{,}00012t} \approx 0{,}5 \iff \mathrm{e}^{-0{,}00012t} \approx \dfrac{0{,}5}{0{,}75} \iff -0{,}00012t \approx \ln\dfrac{2}{3} = \iff$
$t \approx \dfrac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{0{,}00012} \approx 3\ 379$ ans

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$; $\Delta = 64 \times 3 - 64 \times 4 = +64 \times (-1) = (8\mathrm{i})^2$. Il y a donc deux solutions imaginaires conjuguées :
$S = \left\{4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}\ ;\ 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}\right\}$.

2. **a.** $a = 4\sqrt{3} - 4\mathrm{i}$, donc $|a|^2 = 48 + 16 = 64 \iff |a| = 8$. On peut donc écrire $a = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   De même $b = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i} = 8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   b. On a déja $|a| = 8 = \mathrm{OA}$ et $|b| = 8 = \mathrm{OB}$. $\mathrm{AB} = |b - a| = |8\mathrm{i}| = 8$.
   Le triangle OAB est donc équilatéral.

3. On a donc $d = \left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \left(-\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathrm{i}$.

4. **a.** La somme des coefficients estégale à 1, donc non nulle : le point G existe. Par définition $-\overrightarrow{\mathrm{GO}} + \overrightarrow{\mathrm{GD}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ qui se traduit par $z_{\mathrm{G}} = z_{\mathrm{D}} + z_{\mathrm{B}} = 4\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$.

   b. Pour A et B, on utilise le cercle de centre O et de rayon 8, pour C et D le cercle de rayon 2. Pour G la construction est évidente.

   c. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ a a pour affixe $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$; de même le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ a a pour affixe $4\sqrt{3}+4\mathrm{i} = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. ces deux vecteurs ont le même argument, donc les points C, D et G sont alignés.

   d. On a montré que $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{BG}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} \iff$ BGDO est un parallélogramme.

5. On trouve rapidement que GA = CA = CG = 10 : le triangle ACG est équilatéral.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1.

2. B et C sont deux points du cercle équidistants du centre O : O appartient à la médiatrice de [BC] ;
DB = DC : D appartient à la médiatrice de [BC] ;
Enfin G appartient à la médiane issue de D dans le triangle BCD, médiane qui est aussi la médiatrice de [BC].
Conclusion : la droite contenant O, D et G est la droite des milieux dans le triangle ABC, donc elle est parallèle à la droite (AB). Conséquence dans le triangle BCM la droite (GD) contenant le milieu de [BC] et parallèle à (BM) coupe[CM] en son milieu G.

3. le rapport de la similitude est $\dfrac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CB}}$. Or $\mathrm{CM} = 2\mathrm{CG}$ et $\mathrm{CG} = \dfrac{2}{3}\mathrm{CB}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\dfrac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CB}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Quant à l'angle de la similitude il vaut $-\dfrac{\pi}{6}$.

Partie B

1. On a $z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{A}} = \left(z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, donc $z_{\mathrm{E}} = -1 + 2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. Rapport et angle de la similitude : $\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Le rapport est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et l'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
   Le centre est le point invariant ; $z = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \iff z = 1$. Le centre de la similitude est donc le point C.
   La réciproque de cette similitude a le même centre C, le rapport inverse soit $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et l'angle opposé soit $-\dfrac{\pi}{6}$: c'est bien la similitude s.
3. On a $z_{\mathrm{E}'} = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \times \mathrm{i}\sqrt{3} + \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Cette affixe a pour module 1 : le point E$'$ appartient donc à Γ.
4. On a $\mathrm{E}' = \sigma(\mathrm{E}) \iff \mathrm{E} = s(\mathrm{E}')$, d'après la question précédente. Or E$'$ appartient à Γ, donc E appartient à $\mathscr{C}$.
   M est l'image de B par s, donc l'image du cercle Γ par la similitude s est un cercle de centre O$'$ de rayon $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. O$'$ a pour affixe $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$. On a de façon évidente $\overrightarrow{\mathrm{EO}'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{EO}}$, ce qui signifie que O$'$est le centre de gravité du triangle équilatéral ACE.
   $\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre O$'$ contenant E.