

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2004

EXERCICE 1

7 points

Partie A

1. a. Pour tout x , $f(x) = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- b. La fonction f produit de deux fonctions dérivables est dérivable. Pour tout x , $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

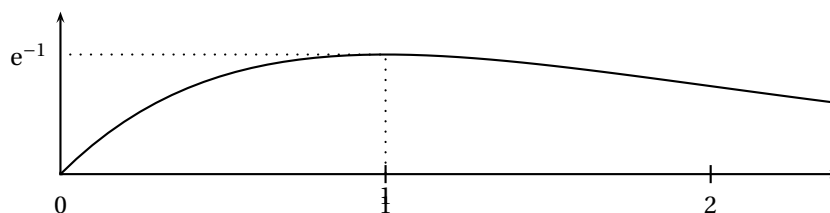
Comme pour tout x , $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$. Soit sur $[0, +\infty[$: $f'(x) \geq 0$ sur $[0, 1]$; $f'(x) \leq 0$ sur $[1, +\infty[$.

Donc f est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$, décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0	-	
$f(x)$	0	↗ $\frac{1}{e}$		↘ 0	

- c. Représentation graphique de f (échelle $\frac{1}{2}$) :



2. a. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$; $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{e}$; donc pour $m \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$ l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0, 1[$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$; $f(1) = \frac{1}{e}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$; donc pour $m \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$ l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur $]1, +\infty[$.

En résumé, pour tout m de $\left] 0, \frac{1}{e} \right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions. Résultat attendu graphiquement : les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe Γ et de la droite d'équation $y = m$. Or si $m \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$, cette droite coupe bien la courbe en deux points distincts.

- b. Pour $m = \frac{1}{4}$, la solution α est celle qui appartient à l'intervalle $]0, 1[$. On trouve facilement que $\alpha \approx 0,357$ soit $\alpha \in]0,35, 0,36[$.

- c. De façon immédiate, pour $m = 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution $x = 0$, et pour $m = \frac{1}{e}$ cette équation admet pour unique solution $x = 1$.

Partie B

1. a. Par hypothèse $u_0 > 0$.
 p étant un entier naturel quelconque, si $u_p > 0$ alors u_{p+1} , produit de u_p par le réel strictement positif e^{-p} , est strictement positif.
 En conclusion pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
 - b. Comme pour tout entier n , $u_n > 0$, comparons $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$, $-u_n < 0$ donc $e^{-u_n} < 1$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$: la suite (u_n) est donc décroissante.
 - c. Il résulte des questions précédentes que la suite (u_n) , décroissante et minorée (par 0), est convergente. Soit ℓ sa limite.
 ℓ est donc solution de l'équation $\ell = \ell e^{-\ell}$, soit $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$. Les deux facteurs s'annulant pour la seule valeur 0, on en déduit que $\ell = 0$.
 En résumé $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
 2. a. $w_n - w_{n+1} = \ln u_n - \ln u_{n+1} = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = -\ln e^{-u_n} = \ln e^{u_n} = u_n$.
 - b. Il résulte de a. que $S_n = w_0 - w_1 + w_1 - w_2 + \dots + w_{n-1} - w_n + w_n - w_{n+1}$.
 Soit après simplification de proche en proche, $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
 - c. Sachant, d'après B.1.c., que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$, et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.
2. Par définition $u_1 = u_0 e^{-u_0}$ donc $u_1 \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$.
- Or d'après A. 2. a., on sait qu'il existe une deuxième valeur, β , telle que $\beta e^{-\beta} = u_1$. On a donc $v_0 = \beta$ puis $v_1 = u_1$ et, plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.

Exercice 2

1. La solution générale de l'équation $y' + y = 0$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-x}$, où k est une constante réelle arbitraire.
 L'image de 0 est e donc $ke^0 = e$ soit $k = e$.
 La fonction f cherchée est donc celle définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e \times e^{-x}$. Soit $f(x) = e^{1-x}$.
2. $e^{1-x} = t \iff 1 - x = \ln t$. La solution de cette équation est donc le réel $1 - \ln t$.
3. Soit u et v les fonctions définies sur $[1, e]$ respectivement par $u(t) = (1 - \ln t)^2$ et $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables et leurs dérivées u' et v' , définies respectivement par $u'(t) = -\frac{2}{t}(1 - \ln t)$ et $v'(t) = 1$, continues sur l'intervalle $[1, e]$. Le théorème d'intégration par parties s'applique donc et :

$$V = \pi \left(\left[t(1 - \ln t)^2 \right]_1^e + 2 \int_1^e (1 - \ln t) dt \right)$$
 Calculons à nouveau par parties $\int_1^e (1 - \ln t) dt$.
 Posons $u(t) = 1 - \ln t$ et $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $[1, e]$, de dérivées respectives u' et v' , continues sur $[1, e]$, définies par $u'(t) = -\frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$.
 D'où : $\int_1^e (1 - \ln t) dt = \left[t(1 - \ln t) \right]_1^e + \int_1^e dt = -1 + e - 1 = e - 2$.
 En reportant dans l'expression de V , on obtient :

$$V = \pi(-1 + 2(e - 2)) = \pi(2e - 5).$$

Exercice 3

1. L'urne contient 6 boules et on en tire 2 : le nombre de cas possibles est donc C_6^2 .

• Pour réaliser l'évènement A_0 il faut tirer 2 boules rouges parmi 4 : le nombre de cas favorables est donc C_4^2 .

On en déduit que $p(A_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2}$. Soit $p(A_0) = \frac{2}{5}$.

• Pour réaliser l'évènement A_1 il faut tirer 1 boule rouge parmi 4 et une boule noire parmi 2 : le nombre de cas favorables est donc 4×2 .

On en déduit que $p(A_1) = \frac{4 \times 2}{C_6^2}$. Soit $p(A_1) = \frac{8}{15}$.

• Pour réaliser l'évènement A_2 il faut tirer 2 boules noires parmi 2 : le nombre de cas favorables est donc 1.

On en déduit que $p(A_2) = \frac{1}{C_6^2}$. Soit $p(A_2) = \frac{1}{15}$.

2. a. Il reste 4 boules dans l'urne et on en tire 2 : le nombre de cas possibles est donc C_4^2 .

• A_0 étant réalisé, il reste dans l'urne 2 boules rouges et 2 boules noires. Pour réaliser B_0 il suffit de tirer 2 boules rouges : il y a donc un cas favorable.

La probabilité $p_{A_0}(B_0) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$.

• A_1 étant réalisé, il reste dans l'urne 3 boules rouges et 1 boule noire. Pour réaliser B_0 il suffit de tirer 2 boules rouges : il y a donc C_3^2 cas favorables.

La probabilité $p_{A_1}(B_0) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}$.

• A_2 étant réalisé, il reste dans l'urne 4 boules rouges. L'évènement B_0 est donc certain. Donc $p_{A_2}(B_0) = 1$.

- b. L'évènement B_0 est la réunion des évènements incompatibles $A_0 \cap B_0$, $A_1 \cap B_0$ et $A_2 \cap B_0$. Par suite $p(B_0)$ est la somme des probabilités de ces trois évènements.

$$\text{Or } p(A_0 \cap B_0) = p_{A_0}(B_0) \times p(A_0) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

$$p(A_1 \cap B_0) = p_{A_1}(B_0) \times p(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}.$$

$$p(A_2 \cap B_0) = p_{A_2}(B_0) \times p(A_2) = \frac{1}{15}.$$

$$\text{D'où } p(B_0) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

- c. Des calculs analogues à ceux menés en a. et b. ci-dessus conduisent à calculer :

$$p_{A_0}(B_1) = \frac{2 \times 2}{C_4^2} = \frac{2}{3}. \text{ D'où } p(A_0 \cap B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

$$p_{A_1}(B_1) = \frac{1 \times 3}{C_4^2} = \frac{1}{2}. \text{ D'où } p(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}.$$

Extraire une boule noire au deuxième tirage quand les deux boules noires ont été extraites lors du premier tirage est impossible. Donc $p_{A_2}(B_1) = 0$.

D'où la valeur de $p(B_1)$, somme des trois probabilités précédentes : $p(B_1) = \frac{8}{15}$. $p_{A_0}(B_2) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$. D'où $p(A_0 \cap B_2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$.

Comme ci-dessus : $p_{A_1}(B_2) = 0$ et $p_{A_2}(B_2) = 0$.

D'où la valeur de $p(B_2)$, somme des trois probabilités précédentes : $p(B_2) = \frac{1}{15}$.

d. On cherche à calculer $p_{B_1}(A_1)$. Or d'après les calculs antérieurs $p(A_1 \cap B_1) = \frac{4}{15}$ et $p(B_1) = \frac{8}{15}$. Donc $p_{B_1}(A_1) = \frac{1}{2}$.

3. L'évènement R est réalisé lorsque l'un des évènements incompatibles ci-dessous l'est :

« tirer une boule noire au premier tirage et une boule noire au second » soit réaliser l'évènement $A_1 \cap B_1$;

ou

« ne tirer aucune boule noire au premier tirage et deux boules noires au second » soit réaliser l'évènement $A_0 \cap B_2$.

Il en résulte que $p(R) = p(A_1 \cap B_1) + p(A_0 \cap B_2) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}$.

Exercice 4

Partie A

1. Les vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} et \vec{OC} ont respectivement pour coordonnées (5, 5), (1, 3) et (8, -4).

Les vecteurs \vec{PA} , \vec{PB} et \vec{PC} ont respectivement pour coordonnées (-5, 5), (-9, 3) et (-2, -4).

Par suite $\vec{OA} \cdot \vec{PA} = 0$ donc $A \in \Gamma$; $\vec{OB} \cdot \vec{PB} = 0$ donc $B \in \Gamma$; $\vec{OC} \cdot \vec{PC} = 0$ donc $C \in \Gamma$.

2. Montrons que $D \in (BC)$ en établissant que les vecteurs \vec{DB} et \vec{BC} sont colinéaires.

\vec{DB} a pour coordonnées (-1, 1), \vec{BC} a pour coordonnées (7, -7), donc $\vec{BC} = (-7)\vec{DB}$.

Montrons que $(OD) \perp (BC)$ en établissant que $\vec{OD} \cdot \vec{BC} = 0$.

\vec{OD} a pour coordonnées (2, 2), \vec{BC} a pour coordonnées (7, -7), donc $\vec{OD} \cdot \vec{BC} = 0$.

En résumé, D est bien le projeté de O sur la droite (BC).

Partie B

1. $(\vec{OM}, \vec{OM}') = \arg \frac{z'}{z} = \arg \frac{20}{z\bar{z}}$. Or $z\bar{z}$ est un réel (strictement positif) donc de même $\frac{20}{z\bar{z}}$. Par suite $\arg \frac{z'}{z} = 0 + k \cdot 2\pi$: les points O, M, M' sont alignés.

2. a. $M \in \Delta$ donc son affixe z est du type $2 + iy$, où y désigne un réel quelconque.

On en déduit que $\bar{z} = 2 - iy$ donc $z + \bar{z} = 4$.

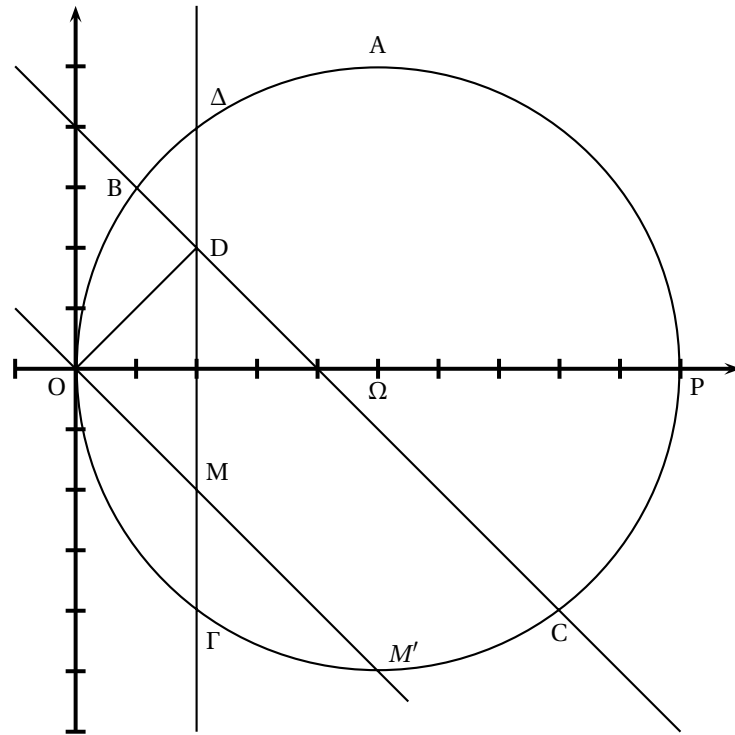
b. $z' + \bar{z}' = \frac{20}{\bar{z}} + \frac{20}{z} = \frac{20(z + \bar{z})}{z\bar{z}} = \frac{80}{z\bar{z}}$. Par suite $5(z' + \bar{z}') = \frac{400}{z\bar{z}} = \frac{20}{\bar{z}} \times \frac{20}{z} = z' \times \bar{z}'$.

c. Démontrons que $M' \in \Gamma$ en établissant que $\Omega M'^2 = 25$.

$\vec{\Omega M'}$ a pour affixe $z' - 5$, donc $\Omega M'^2 = (z' - 5)(\overline{z' - 5})$.

Or $(z' - 5)(\overline{z' - 5}) = (z' - 5)(\bar{z}' - 5) = z'\bar{z}' - 5(z' + \bar{z}') + 25$. D'après la relation établie en **b.** il en résulte que $(z' - 5)(\bar{z}' - 5) = 25$ c'est à dire que $\Omega M'^2 = 25$: $M' \in \Gamma$.

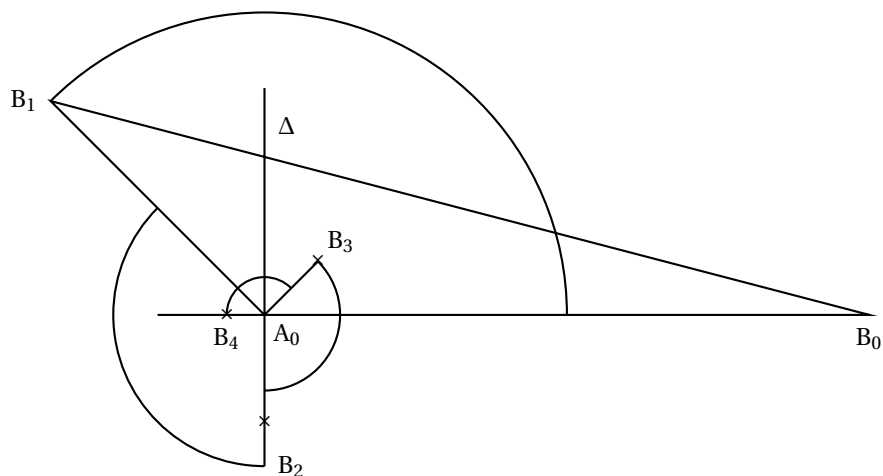
On sait de plus, d'après la question **1.**, que $M' \in (OM)$. Donc M' est bien le point d'intersection (autre que O) de la droite (OM) et du cercle Γ .



Exercice 4

Exercice de spécialité

1. A_0 et B_0 ont été choisis de façon quelconque avec $A_0B_0 = 8$.
 On peut vérifier que $A_0B_i = \frac{1}{2}A_0B_{i-1}$ et que une mesure de $(\overrightarrow{A_0B_{i-1}}, \overrightarrow{A_0B_i})$ est $\frac{3\pi}{4}$ avec $1 \leq i \leq 4$.



2. On sait que l'image d'un triangle par une similitude plane est un triangle semblable. Ici $A_0 = S(A_0)$, $B_{n+1} = S(B_n)$ et $B_{n+2} = S(B_{n+1})$. Donc le triangle $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ est l'image par la similitude S du triangle $A_0B_nB_{n+1}$: ces triangles sont semblables.
3. a. $\ell_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = S(B_n)S(B_{n+1})$. Par suite $\ell_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n$: la suite (ℓ_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. On sait que $\ell_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ell_0$.

c. On sait que $\sum_n = \ell_0 \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 1}{\frac{1}{2}}$. Donc $\sum_n = 2\ell_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_n = 2\ell_0$.

4. a. Comme 3 et 4 sont premiers entre eux, il existe des couples d'entiers relatifs $(u ; v)$ tels que $3u - 4v = 2$; $(2 ; 1)$ constitue une solution particulière. On en déduit que les solutions de $3x - 4y = 2$ sont celles de $3x - 4y = 3 \times 2 - 4 \times 1$, soit encore celles de $3(x - 2) = 4(y - 1)$.

Le théorème de Gauss s'applique : 4 divise $3(x - 2)$, 4 est premier avec 3 donc 4 divise $x - 2$ c'est à dire qu'il existe un entier t tel que $x - 2 = 4t$ soit $x = 2 + 4t$.

On en déduit facilement que $y - 1 = 3t$ soit $y = 1 + 3t$.

En résumé les solutions de $3x - 4y = 2$ sont les couples d'entiers relatifs de la forme $(2 + 4t, 1 + 3t)$, avec $t \in \mathbb{Z}$.

- b. Comme par définition de la suite de points (B_n) , on a $B_n = S^n(B_0)$, on en déduit que une mesure de $(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_n})$ est $n \times \frac{3\pi}{4}$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Pour que le point B_n appartienne à Δ il est nécessaire et suffisant que $n \times \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, où $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$.

On en déduit que (n, k) est solution de $3n = 2 + 4k$ soit de $3n - 4k = 2$.

Il résulte du a. que n est du type $2 + 4t$, avec $t \in \mathbb{Z}$.

Les entiers naturels n pour lesquels $B_n \in \Delta$ sont donc du type $2 + 4t$ avec $t \in \mathbb{N}$.