

~ Correction du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ~
novembre 2004

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. a. Soit $z_A = 1 - i$; alors $z_{A'} = (1 - i)^2 - 4(1 - i) = 1 - 1 - 2i - 4 + 4i = -4 + 2i$.
 $z_B = 3 + i$; alors $z_{B'} = (3 + i)^2 - 4(3 + i) = 9 - 1 + 6i - 12 - 4i = -4 + 2i = z_{A'}$.
- b. Supposons que z_1 et z_2 aient la même image par f , alors :
 $z_1^2 - 4z_1 = z_2^2 - 4z_2 \iff z_1^2 - z_2^2 - 4z_1 + 4z_2 = 0 \iff (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) - 4(z_1 - z_2) = 0 \iff (z_1 - z_2)[z_1 + z_2 - 4] = 0 \iff \begin{cases} z_1 - z_2 = 0 \\ z_1 + z_2 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = z_2 \\ z_1 + z_2 = 4 \end{cases}$
- Conclusion : si deux points ont la même image :
 - ou ils sont égaux ;
 - ou ils sont symétriques autour du point d'affixe 2 (car $\frac{z_1 + z_2}{2} = 2$).

2. Soit I le point d'affixe -3 .

- a. $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[OI]$ et $[MM']$ ont le même milieu soit si $-\frac{3}{2} = \frac{z + z'}{2} \iff -3 = z + z' \iff -3 = z + z^2 - 4z \iff z^2 - 3z + 3 = 0$.
- b. $z^2 - 3z + 3 = 0 \iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0 \iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$.
- D'où les deux solutions : $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

3. a. $(z' + 4) = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$. De cette égalité il découle :
 - en égalant les modules $|z' + 4| = |(z - 2)^2| = |z - 2|^2$,
 - en égalant les arguments $\arg(z' + 4) = \arg[(z - 2)^2] = 2\arg(z - 2)$.
- b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
 Si un point M appartient cercle (\mathcal{C}) de centre J et de rayon 2, alors $|z - 2| = 2$; d'après la question précédente son image M' a une affixe z' telle que $|z' + 4| = |z - 2|^2 = 2^2 = 4$: ceci signifie que M' appartient au cercle (\mathcal{C}') de centre K et de rayon 4.
- c. $z_E = -4 - 3i$. Donc $(z_E + 4) = -4 - 3i + 4 = -3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
 D'après la question 3. a. il résulte que $\arg(z - 2) = -\frac{\pi}{4}$.
 De $(z' + 4) = (z - 2)^2$ il découle que ou $z - 2 = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ou $z - 2 = -\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}}$,
 soit $2 + \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ou $2 - \sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ou encore $z_1 = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ ou $z_2 = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$.

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FG]$.

L est le barycentre de $\{(A, 1); (B, 3)\}$.

Soit (π) le plan d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$.

- Par définition de L, $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées de L sont : $\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right)$. Réponse : **b**.
- Le point L appartient de façon évidente à (π) Le plan (π) ; le point G(1; 1; 1) aussi ($4 - 4 + 3 - 3 = 0$); le point E(0; 0; 1) aussi; mais pas le point J $\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ (car $4 - 2 + 3 - 3 = 0$ est fausse); enfin A n'appartient pas au plan (π) . Conclusion (π) est le plan (GLE). Réponse : **a**.
- Un plan parallèle à (π) a une équation de la forme : $4x - 4y + 3z + d = 0$; $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \in (\pi) \iff 2 - 0 + 3 + d = 0 \iff d = -5$.
La droite (FB) a pour équations : $x = 1$ et $y = 0$; en reportant dans l'équation du plan on obtient $4 + 3z - 5 = 0 \iff z = \frac{1}{3}$. Le point M a donc pour coordonnées $\left(1; 0; \frac{1}{3}\right)$. Réponse : **c**.
- On a $\overrightarrow{EL} \left(\frac{3}{4}; 0; -1\right)$ qui est colinéaire au vecteur $(3; 0; -4)$. Une équation de la droite (EL) est donc :
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 1 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$
 Un système d'équations de la droite (FB) est $x = 1$ et $y = 0$. En remplaçant dans les équations de (EL), on obtient $1 = 3t \iff t = \frac{1}{3}$ et finalement les coordonnées de N sont $\left(1; 0; -\frac{1}{3}\right)$ qui est bien le symétrique de M autour de B.
On a $\overrightarrow{IM} \left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{2}{3}\right)$ qui est colinéaire au vecteur $(3; 0; -4)$ donc au vecteur \overrightarrow{IM} .
Réponses : **a**. et **b**.
- On prend comme base du tétraèdre FIJM le triangle rectangle FIM, avec $FI = \frac{1}{2}$, $FM = \frac{2}{3}$ et comme hauteur $FJ = \frac{1}{2}$:
Le volume est donc égal à $\frac{1}{3} \left(\frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$.
Réponse : **c**.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x - 1$.

- g somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} est dérivable et $g'(x) = e^x - 1$. Comme $e^0 = 1$, $e^x > 1$, si $x > 0$ on en déduit le signe de $g'(x)$ donc les variations de g . Etudier les variations de la fonction g sur \mathbb{R} .
 - g est décroissante de $+\infty$ à 0 sur $]-\infty; 0]$;
 - $g(0) = 0$;
 - g est croissante sur $[0; +\infty[$ g a donc un minimum 0 pour $x = 0$.
Conclusion Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

2. De la question précédente il résulte que $e^x - x - 1 \geq 0 \iff (e^x - x) \geq 1 > 0$.

Partie B

1. a. – Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$.

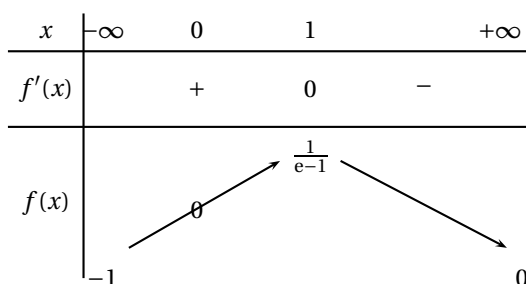
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

– Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

b. Les résultats précédents montrent que l'axe des abscisses est asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$ et que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de $-\infty$.

2. a. D'après A. 2, le dénominateur de f n'est pas nul : f est donc dérivable et $f'(x) = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$.
Comme e^x et $e^x - x$ sont supérieurs à zéro, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

b. Si $x < 1$, $f'(x) > 0$ et f est croissante ;
Si $x > 1$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante.



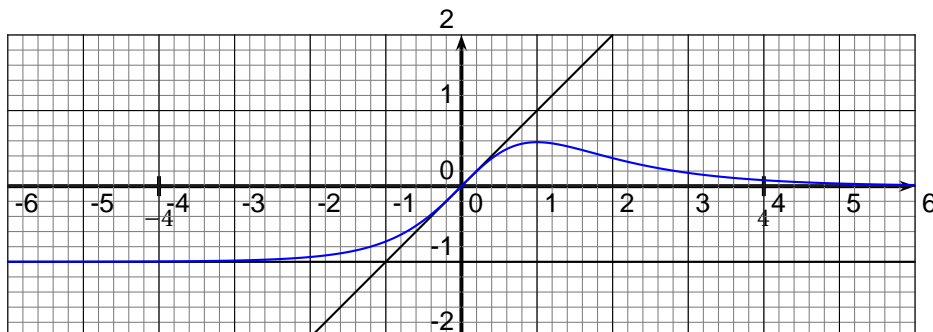
3. a. On a $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$.

$$M(x; y) \in (T) \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y = x.$$

b. La courbe (\mathcal{C}) est au dessus de la droite $(T) \iff \frac{x}{e^x - x} > x \iff x > x(e^x - x) \iff x(e^x - x - 1) < 0 \iff x < 0$, car on a vu à la question A. 1. que $e^x - x - 1 > 0$.

On obtient de manière analogue que la courbe (\mathcal{C}) est au dessous de la droite (T) si $x > 0$.

4.



EXERCICE 3

5 points

Exercice de spécialité

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Supposons qu'il existe un diviseur commun d à a et à b . Il existe donc a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
L'égalité $au + bv = 1$ peut s'écrire $da'u + db'v = 1 \iff d(a'u + b'v) = 1$.
Ceci montre que d divise 1, donc $d = 1$, ce qui montre que a et b sont premiers entre eux.
- b. $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ peut s'écrire $a \times a + b(a - b) = 1$. Avec $u = a$ et $v = b - a$, ceci montre d'après le cours que a et b sont premiers entre eux.
2. a. Lorsque $a = b$, l'égalité s'écrit $(a^2 + a^2 - a^2)^2 = 1 \iff a^4 = 1 \iff a = 1$.
- b. On vient de voir que (1 ; 1) est un couple solution.
Si $a = 2, b = 3$, alors $(4 + 6 - 9)^2 = 1^2 = 1$, donc (2 ; 3) est un couple solution.
Si $a = 5, b = 8$, alors $(25 + 40 - 64)^2 = 1^2 = 1$, donc (5 ; 8) est un couple solution..
- c. $(a ; b)$ est solution donc $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ et si $a < b \iff a - b < 0$, alors $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) < 0$ car $a + b$ somme de deux positifs est positif.
3. a. Si $(x ; y)$ est une solution avec $xy \neq 1$ alors $(x^2 + xy - y^2)^2 = 1 \iff x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 2xy^3 = 1$.
Calculons $[(y - x)^2 + x(y - x) - x^2]^2 = (y^2 + x^2 - 2xy + xy - x^2 - x^2)^2 = (y^2 - x^2 - xy)^2 = y^4 + x^2y^2 + x^4 - 2xy^3 - 2x^2y^2 + x^3y = 1$ (d'après l'égalité ci-dessus).
De même calculons $(y^2 + y(y + x) - (y + x)^2)^2 = (y^2 + xy - x^2 - 2xy)^2 = (y^2 - x^2 - xy)^2$ que l'on vient de calculer et qui est égal à 1.
Si $(x ; y)$ est un couple solution, alors $(y - x ; x)$ et $(y ; y + x)$ en sont deux autres
- b. De 2. b. et 3. a. on en déduit que le couple (2 ; 3) fournit les couples (1 ; 2) et (3 ; 5) et que le couple solution (5 ; 8) donne les couples (3 ; 5) (déjà trouvé) et (8 ; 13) solutions.
4. Démonstration par récurrence :
- Initialisation : le couple $(a_0 ; a_1) = (1 ; 1)$ est solution ;
 - Hérité : supposons que le couple de rang n , $(a_n ; a_{n+1})$ soit solution.
- De la question 3. a. il résulte que le couple $(a_{n+1} ; a_{n+1} + a_n) = (a_{n+1} ; a_{n+2})$ est aussi solution.
- On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \geq 0$, les couples $(a_n ; a_{n+1})$ sont des couples solutions.
- D'après la question 1. b. les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.
- Les premiers nombres de la suite (de Fibonacci) sont 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ... : deux termes consécutifs sont premiers entre eux.

EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} v_0 &= 4 \\ v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. $u_1 = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$, $v_1 = \frac{\frac{7}{2}+4}{2} = \frac{15}{4}$, $u_2 = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{29}{8}$ et $v_2 = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \frac{59}{16}$.

2. Soit la suite $w_n = v_n - u_n$.

a. Calculons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_{n+1} + v_n - 2u_{n+1}}{2} = \frac{v_n - u_{n+1}}{2} = \frac{v_n - \frac{u_n + v_n}{2}}{2} = \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4}w_n$.

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. On sait que $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$; or $w_0 = 4 - 3 = 1$.

Donc $w_n = \frac{1}{4^n}$.

Comme la raison $\frac{1}{4}$ est comprise entre 0 et 1, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0_+$.

3. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} > 0$, car la suite (w_n) est positive.

La suite (u_n) est donc croissante.

De même $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n + v_n - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}w_n < 0$.

La suite (v_n) est donc décroissante.

D'autre part la différence $v_n - u_n$ égale à w_n a pour limite 0.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles ont donc la même limite ℓ .

4. Soit $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. On a $t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + u_{n+1} + v_n}{3} = \frac{u_n + v_n + 2v_n + u_n + v_n}{6} = \frac{2u_n + 4v_n}{6} = \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$.

La suite (t_n) est donc constante et $t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{11}{3}$.

b. De $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{11}{3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + 2v_n}{3} = \ell$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{11}{3}$.