

Corrigé du baccalauréat S France juin 2004

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$.
Or $2n + 3 \geq 3 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Conclusion :
la suite (u_n) est strictement croissante.
2. a. Démonstration par récurrence :
 - Initialisation : $u_0 = 1 > 0^2$: vrai ;
 - Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > n^2$, alors
 $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1 + 2$ ou encore $u_{n+1} > (n+1)^2 + 2$
donc a fortiori $u_{n+1} > (n+1)^2$.
 On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$
- b. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ on a par comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= u_0 + 3 = 4 \end{aligned}$$
3. On calcule les premiers termes :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + 2 + 3 = 9 \\ u_3 &= u_2 + 4 + 3 = 16 \\ u_4 &= u_3 + 6 + 3 = 25 \end{aligned}$$

On peut donc conjecturer que $u_n = (n+1)^2$.

Démonstration de la propriété par récurrence :

- Initialisation $u_0 = 1 = 1^2$
 - Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = (n+1)^2$
On a donc $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$.
- On a donc démontré par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $(1+i)^6 = [(1+i)^2]^3 = (1+i)^6 = (1+2i-1)^3 = (2i)^3 = -8i$.
Autre méthode : $|1+i|^2 = 2$, donc $|1+i| = \sqrt{2}$; donc $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Donc $(1+i)^6 = \left[\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \right]^6 = 8e^{6i\frac{\pi}{4}} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i$.
2. a. Soit l'équation $z^2 = -8i$; d'après la question précédente $(1+i)^6 = -8i$
donc $[(1+i)^3]^2 = -8i$ donc le nombre complexe $z = (1+i)^3$ est
solution de (E); or $(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = (1+2i-1)(1+i) = -2+2i$.
Conclusion : $-2+2i$ est une solution de (E).
 - b. $z^2 = -8i$, d'où $z^2 - (-8i) = 0 \iff z^2 - (-2+2i)^2 = 0 \iff$
 $[z - (-2+2i)][z + (-2+2i)] = 0$.
On retrouve la solution précédente et aussi le nombre complexe
 $2-2i$ autre solution de l'équation (E).

3. $(1 + i)^6 = -8i \iff [(1 + i)^2]^3 = -8i$.

Le nombre complexe $(1 + i)^2 = 2i$ est solution de l'équation (E').

4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Soit A le point d'affixe $2i$ Si B est l'image de A par r , on a :

$$z_B = b = z_A e^{\frac{2i\pi}{3}}. \text{ Donc } b = 2i \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\sqrt{3} - i.$$

Pour C , l'image de B par la rotation r , on a : $c = e^{\frac{2i\pi}{3}} b =$

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-\sqrt{3} - i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = \sqrt{3} - i.$$

b. On a $(-\sqrt{3} - i)^3 = (-\sqrt{3} - i)^2 (-\sqrt{3} - i) = (2 + 2i\sqrt{3}) (-\sqrt{3} - i) =$
 $-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2i - 6i = -8i$.

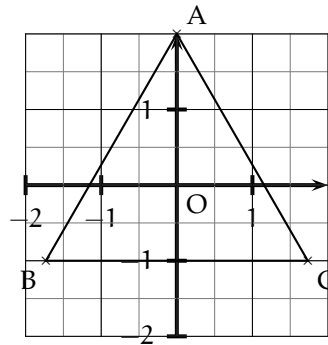
Variante : pour c : on calcule facilement que $|c| = 2$, d'où $c = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \right) =$

$$2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

D'où $c^3 = (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^3 = 2^3 e^{-3i\frac{\pi}{6}} = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} = -8i$.

Donc b et c sont solution de l'équation (E').

5. a. Représentation des points A, B, C .



b. $AB = |z_B - z_A| = |-\sqrt{3} - 3i| = 2\sqrt{3};$

$$AC = |z_C - z_A| = |\sqrt{3} - 3i| = 2\sqrt{3};$$

$$BC = |z_C - z_B| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}. \text{ Par la rotation } r :$$

- l'image de A est B ;

- l'image de B est C ;

- l'image de C est C' tel que $z_{C'} = e^{\frac{2i\pi}{3}} (\sqrt{3} - i) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\sqrt{3} - i) =$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = 2i.$$

Donc $C' = A$.

L'image de C est A .

Les trois points images sont donc les sommets du triangle BCA . Or ce triangle a ses trois côtés de même longueur : il est donc équilatéral.

c. G centre de gravité (ou isobarycentre des points A, B et C) du tri-

angle ABC a une affixe telle que $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{2i - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i}{3} =$

0.

Le centre de gravité est donc le point O.

Autre méthode : par définition de la rotation on a $OA = OB = OC$; O est donc le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) ; or ce triangle est équilatéral : son centre du cercle circonscrit est aussi son centre de gravité.

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. $1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$ est la somme des k premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x : elle est donc égale à : $\frac{x^k - 1}{x - 1}$ (pour $x \neq 1$).

$$\text{Donc } (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = (x - 1) \times \frac{x^k - 1}{x - 1} = x^k - 1.$$

Pour $x = 1$: l'égalité est évidente.

2. a. $n \in \mathbb{N}$, $n = dk$.

D'après la question 1. $a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) = a^{dk} - 1 = (a^d)^k - 1 = (a^d - 1)(\dots + \dots)$, la parenthèse étant une somme d'entiers donc un entier.

Conclusion : $a^n - 1 = (a^d - 1)(\dots + \dots)$, ce qui signifie que $(a^d - 1)$ est un diviseur de $a^n - 1$.

- b. On a donc

– 2 004 est multiple de 3, donc d'après le a. $2^{2004} - 1$ est divisible par $2^3 - 1 = 7$;

– 2 004 est multiple de 3 et de 2, donc de 6 ; d'où $2^{2004} - 1$ est divisible par $2^6 - 1 = 63$;

– On vient de voir que $2^{2004} - 1 = 63k = 9 \times (7k)$, donc $2^{2004} - 1$ est divisible par 9.

3. a. $m = dm'$ et $n = dn'$. Puisque d est le plus grand diviseur commun à m et n , on sait que m' et n' sont premiers entre eux. D'après Bezout il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$m'u - n'v = 1 \iff m'ud - n'vd = d \iff mu - nv = d$$

- b. Avec u et v positifs, l'égalité précédente peut s'écrire $mu = nv + d$.

$$\text{D'où : } (a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = (a^{nv+d} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = (a^{nv} \times a^d - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = (a^{nv} \times a^d) - 1 - (a^{nv} \times a^d) + a^d = a^d - 1.$$

Le PGCD de $a^{mu} - 1$ et $a^{nv} - 1$ divise aussi $a^{mu} - 1$ et $(a^{nv} - 1)a^d$ (et c'est le plus grand diviseur) donc leur différence qui est $a^d - 1$.

Donc le PGCD de $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d$ et de $a^{nv} - 1$ est égal au PGCD de $a^d - 1$ et de $a^{nv} - 1$. Nous avons vu à la question précédente que comme d divise n , $a^d - 1$ divise $a^{nv} - 1$.

Conclusion : le PGCD de $a^{mu} - 1$ et $a^{nv} - 1$ est égal à $a^d - 1$.

- c. Application : $m = 63$, $n = 60$.

$$63 = 3^2 \times 7 \text{ et } 60 = 2 \times 3 \times 5. \text{ Donc PGCD}(63 ; 60) = 3.$$

$$\text{On a } m = 63 = 3 \times 21 = 3m' \text{ et } n = 60 = 3 \times 20 = 3n'.$$

D'autre part 21 et 20 sont premiers et on trouve facilement

$$u = 1, v = 1 \text{ tels que } 21 \times 1 - 20 \times 1 = 1.$$

Donc $mu - nv = 63 - 60 = 3 = \text{PGCD}(63 ; 60)$. En appliquant le

résultat de la question précédente :
 $\text{PGCD}(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1) = 2^3 - 1 = 7.$

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

1. Réponse D : Pour que S appartienne à \mathcal{D} , il faut que les coordonnées de S vérifient les équations paramétriques de \mathcal{D} . Or ces coordonnées de S ne vérifient ni A ($z \neq 3$) ni B (il faudrait $t = -1$ et $t = 1/3$), mais vérifient les équations C et D.

De plus \mathcal{D} est perpendiculaire à \mathcal{P} il faut que tout vecteur directeur de \mathcal{D} soit colinéaire à tout vecteur normal de \mathcal{P} . Le vecteur $\vec{n}(1 ; 1 ; -3)$ est normal à \mathcal{P} .

Or la droite définie par C a un vecteur directeur de coordonnées $(1 ; -2 ; 0)$ qui n'est pas colinéaire à \vec{n} .

Par contre un vecteur directeur de la droite définie par D a pour coordonnées $(1 ; 1 ; -3)$ qui sont les coordonnées de \vec{n} .

2. Réponse D car seules les coordonnées de D vérifient l'équation du plan \mathcal{P} : elles correspondent à la valeur $t = \frac{14}{11}$.

3. Réponse B :

$$d(S, \mathcal{P}) = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

4. Réponse B :

La distance de S au plan est inférieure à 3 donc l'intersection de la sphère et du plan \mathcal{P} est un cercle de centre H.

Le triangle SHM, M étant un point du cercle est rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore on a : $3^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2 + r^2 \iff r^2 =$

$$9 - \frac{9}{11} = \frac{90}{11} \Rightarrow r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

1. On a donc $0,5 = \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{200} = -e^{-200\lambda} + 1 \iff$

$$e^{-200\lambda} = 0,5 \iff -200\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{200}.$$

2. La probabilité cherchée est $1 - \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{300} = e^{-300\lambda} =$

$$e^{-\frac{300 \ln 2}{200}} = e^{-\frac{3 \ln 2}{2}} \approx 0,353 \text{ soit } 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}$$

3. a. Pour calculer l'intégrale on pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v'(x) &= e^{-\lambda x} \\ u'(x) &= 1 & v(x) &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Les fonctions u , u' , v , v' étant continues, on peut intégrer par parties et

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[-\lambda \frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} \right]_0^A + \frac{1}{\lambda} \int_0^A e^{-\lambda x} dx = \left[-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^A = \left[-x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^A = -A e^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}.$$

4. Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\lambda A} = 0$ (car $\lambda > 0$ et que $\lim_{A \rightarrow +\infty} A e^{-\lambda A} = 0$, on en déduit que :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\ln 2}.$$

Donc $d_m = \frac{200}{\ln 2} \approx 289$ semaines à une semaine près.

EXERCICE 5

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. $x'(t) = v(t)$.

- Si v est solution de l'équation (F), alors pour tout réel $t \geq 0$,

$$v'(t) = -\frac{1}{8}v(t) + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Or } x'(t) = v(t) \Rightarrow x''(t) = v'(t).$$

L'équation précédente s'écrit donc :

$$x''(t) = -\frac{1}{8}x'(t) + \frac{1}{4}$$

$$8x''(t) = -x'(t) + 2$$

$$25x'(t) + 200x''(t) = 50$$

La fonction x est donc solution de l'équation (E).

- Inversement si x est solution de (E), alors pour tout réel positif,

$$25x'(t) + 200x''(t) = 50$$

$$x''(t) = -\frac{26}{200}x'(t) + \frac{50}{200}$$

$$x''(t) = -\frac{1}{8}x'(t) + \frac{1}{4}$$

$$v'(t) = -\frac{1}{8}v(t) + \frac{1}{4}$$

car en posant $v(t) = x'(t)$, $v'(t) = x''(t)$

Conclusion : la fonction x est solution de (E) si et seulement si la fonction v est solution de (F).

Résolution de (F) : cette équation est de la forme $y' = ay + b$. Elle a une solution particulière constante $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} = 2$ et les solutions de l'équation $y' = ay$ sont de la forme $y = Ke^{ax} = Ke^{-\frac{1}{8}x}$ (avec $K \in \mathbb{R}$).

Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont donc de la forme :

$$y = Ke^{-\frac{1}{8}x} + 2$$

Les fonctions v solutions de l'équation (F) sont les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par

$$v(t) = Ke^{-\frac{1}{8}t} + 2$$

- b. i. Calcul de $x'(t)$: on sait que $x'(t) = v(t) = Ke^{-\frac{1}{8}t} + 2$.
Comme $x'(0) = 0 \iff Ke^{-\frac{1}{8} \times 0} + 2 = 0 \iff K + 2 = 0 \iff K = -2$, on a finalement pour tout t positif :

$$x'(t) = 2 - 2e^{-\frac{1}{8}t}$$

- ii. Calcul de $x(t)$: d'après la question précédente x est une primitive sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto 2 - 2e^{-\frac{1}{8}t}$, soit :

$$x(t) = 2t - 2 \times \frac{1}{-\frac{1}{8}} e^{-\frac{1}{8}t} + K' = 2t + 16e^{-\frac{1}{8}t} + K' \text{ avec } K' \in \mathbb{R}.$$

Comme on sait que $x(0) = 0$, alors $16 + K' = 0 \iff K' = -16$.
Conclusion : la fonction solution de (E) est définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$x(t) = 2t - 16 + 16e^{-\frac{1}{8}t}$$

- c. On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{8}t} = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 2$.

Donc $V = 2$.

La vitesse v du chariot est inférieure ou égale à 90 % de V si

$$v(t) \leq 0,9V \iff -2e^{-\frac{1}{8}t} + 2 \leq 0,9 \times 2 \iff e^{-\frac{1}{8}t} \geq 0,1 \iff -\frac{1}{8}t \geq \ln 0,1 \iff \frac{1}{8}t \leq \ln 10 \iff t \leq 8 \ln 10 \approx 18,4 \text{ secondes.}$$

- d. La distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes est :

$$x(30) = 2 \times 30 - 16 + 16e^{-\frac{30}{8}} x(30) = 44 + 16e^s - 154x(30) \approx 44,4$$

En 30 secondes le chariot a parcouru environ 44,4 mètres à 1 décimètre près.