

❧ Corrigé du baccalauréat S ❧
Antilles-Guyane juin 2004

EXERCICE 1

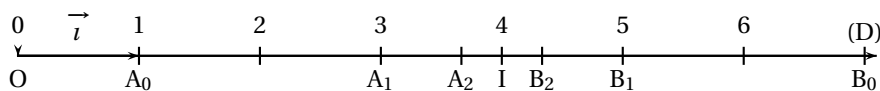
4 points

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

1. On calcule $a_1 = 3$, $b_1 = 5$, $a_2 = \frac{11}{3}$, $b_2 = \frac{13}{3}$.



2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$.

$$\text{On a } u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - \frac{1}{3}(2a_n + b_n) = \frac{1}{3}(-a_n + b_n) = \frac{1}{3}u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 7 - 1 = 6$.

Produit de deux facteurs supérieur à zéro, u_n en fonction de n . On sait que

$$u_n = u_0 \times r^n \text{ soit ici } u_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

3. Produit de deux facteurs supérieurs à zéro, u_n est supérieur à zéro.

$$\text{Or } u_n > 0 \iff b_n - a_n > 0 \iff b_n > a_n.$$

Variations de a_n :

$$\text{Quel que soit } n, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{3}(-a_n + b_n) = \frac{1}{3}u_n > 0, \text{ d'après}$$

ci-dessus. On a donc $a_{n+1} - a_n > 0 \iff a_{n+1} > a_n$.

La suite (a_n) est donc croissante.

Variations de b_n :

$$\text{On a de même quel que soit } n, b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) - b_n = -\frac{1}{3}(b_n - a_n) = -\frac{1}{3}u_n < 0.$$

$$\text{On a donc } b_{n+1} - b_n < 0 \iff b_{n+1} < b_n.$$

La suite (b_n) est donc décroissante.

Géométriquement : les points A_n se placent de gauche à droite, et les points B_n de droite à gauche, les premiers étant toujours à gauche des seconds.

4. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes :

L'une est croissante, l'autre décroissante et la différence $b_n - a_n = u_n =$

$$2 \times \frac{1}{3^{n-1}}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0.$$

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) + \frac{1}{3}(2a_n + b_n) = \frac{1}{3}(3a_n + 3b_n) = a_n + b_n = u_n.$$

La suite (v_n) est donc une suite constante. En particulier $u_n = u_0 = a_0 + b_0 = 1 + 7 = 8$.

En conséquence l'abscisse du milieu du segment $[A_n B_n]$ est $\frac{8}{2} = 4$.

Tous les segments $[A_n B_n]$ ont donc le même milieu d'abscisse 4, c'est-à-dire I.

6. On peut conclure de ce qui précède que les suites sont convergentes de limite commune ℓ . Par conséquent la suite v_n est convergente de limite $\ell + \ell = 2\ell = 8$, d'après la question 5.

Conclusion : les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes de limite $\ell = 4$.

Interprétation géométrique : les points A_n (par la gauche) et B_n (par la droite) se rapprochent du point I.

On peut également déduire du système $\begin{cases} u_n = -a_n + b_n = \frac{2}{3^{n-1}} \\ v_n = a_n + b_n = 8 \end{cases}$ que :

$$\begin{cases} a_n = 4 - \frac{1}{3^{n-1}} \\ b_n = 4 + \frac{1}{3^{n-1}} \end{cases}$$

Les résultats précédents en découlent : on constate de plus que les points se rapprochent d'une distance à chaque fois trois fois plus petite que la précédente du point I.

EXERCICE 2**7 points****Commun à tous les candidats**

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{1+t} dt$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$.

1. Comme $a \geq 0$, $1+t > 0$ sur $[0; a]$, donc $I_0(a) = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a)$.

2. $I_1(a) = \int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2} dt$.

À l'aide d'une intégration par parties, en posant pour $t \geq 0$:

$$\begin{cases} u(t) = t-a & ; & v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \\ u'(t) = 1 & ; & v(t) = -\frac{1}{1+t} \end{cases},$$

on obtient par continuité des fonctions u' et v' :

$$I_1(a) = \left[-\frac{t-a}{1+t} \right]_0^a + \int_0^a \frac{1}{1+t} dt = \left[-\frac{t-a}{1+t} + \ln(1+t) \right]_0^a = \ln(1+a) - a.$$

3. De même à l'aide d'une intégration par parties, en posant pour $t \geq 0$:

$$\begin{cases} u(t) = (t-a)^{k+1} & ; & v'(t) = \frac{1}{(1+t)^{k+2}} \\ u'(t) = (k+1)(t-a)^k & ; & v(t) = -\frac{1}{(k+2-1)(1+t)^{k+2-1}} = \frac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \end{cases},$$

on obtient par continuité de u' et v' pour $t \geq 0$,

$$I_{k+1}(a) = \left[\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \right]_0^a + \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt = \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} + I_k(a) =$$

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout réel } a \geq 0.$$

4. Soit P le polynôme défini sur \mathbb{R} par $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.

En utilisant la relation de récurrence précédente,

$$I_2(a) = \frac{a^2}{2} + I_1(a) = \ln(1+a) - a + \frac{a^2}{2},$$

$$I_3(a) = \frac{-a^3}{3} + I_2(a) = \ln(1+a) - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3},$$

$$I_4(a) = \frac{a^4}{4} + I_3(a) = \ln(1+a) - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4},$$

$$I_5(a) = \frac{-a^5}{5} + I_4(a) = \ln(1+a) - a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{4} - \frac{a^5}{5}.$$

La dernière égalité peut s'écrire d'après la définition de P ,

$$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a).$$

5. $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt = \left[\frac{(t-a)^6}{6} \right]_0^a = -\frac{a^6}{6}$.

6. a. En partant de l'encadrement :

$$0 \leq t \leq a \Rightarrow 1 \leq 1+t \leq 1+a \Rightarrow 1^6 \leq (1+t)^6 \leq (1+a)^6$$

(par croissance de la fonction $x \mapsto x^6$), $\Rightarrow 0 < \frac{1}{(1+a)^6} \leq \frac{1}{(1+t)^6} \leq 1 \Rightarrow$

$$(t-a)^5 \leq \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq \frac{(t-a)^5}{(1+a)^6} \leq 0 \text{ (car } t-a \leq 0 \text{ .}$$

$$\text{Conclusion : pour tout } t \in [0; a], \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5.$$

- b. On vient de démontrer que $(t-a)^5 \leq \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq 0$.

On intègre cette double inégalité entre 0 et a pour obtenir :

$$\int_0^a (t-a)^5 dt \leq \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \leq 0$$

$$\text{soit, } J(a) \leq I_5(a) \leq 0.$$

7. D'après la question 4, $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$ ce qui implique $|I_5(a)| = |\ln(1+a) - P(a)| = -I_5(a)$, car d'après la question précédente $I_5(a) \leq 0$. On a vu que $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$ soit en prenant les opposés :

$$0 \leq I_5(a) \leq -J(a).$$

On a donc $|\ln(1+a) - P(a)| \leq -J(a)$ soit finalement :

$$\text{Pour tout } a \in [0; +\infty[, |\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}.$$

8. Pour avoir une approximation à 10^{-3} près il suffit que

$$\frac{a^6}{6} \leq 10^{-3} \iff a^6 \leq 6 \cdot 10^{-3} \iff a \leq (6 \cdot 10^{-3})^{1/6}.$$

La calculatrice donne $a \leq 0,4262$.

Un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près est donc $[0; 0,426]$.

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

On pose $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

$$z^2 = \left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i + i\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) + 2i\sqrt{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}. \text{ Réponse b}$$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

$$\text{On a } |z^2|^2 = 8+8 = 16 = 4^2. \text{ Donc } z^2 = 4 \left(\frac{\sqrt{22} - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{22} + \sqrt{2}}{2} \right) = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 4e^{-\frac{i\pi}{4}}. \text{ Réponse b.}$$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

$$\text{Le module de } z \text{ est } 2. \text{ Un de ses arguments } \theta \text{ est tel que } 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \iff$$

$$\theta = -\frac{\pi}{8} + \pi k.$$

L'énoncé montre que la partie réelle est négative : l'argument est donc $\theta =$

$$-\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}.$$

Conclusion : $z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$. Réponse a.

4. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$ et $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

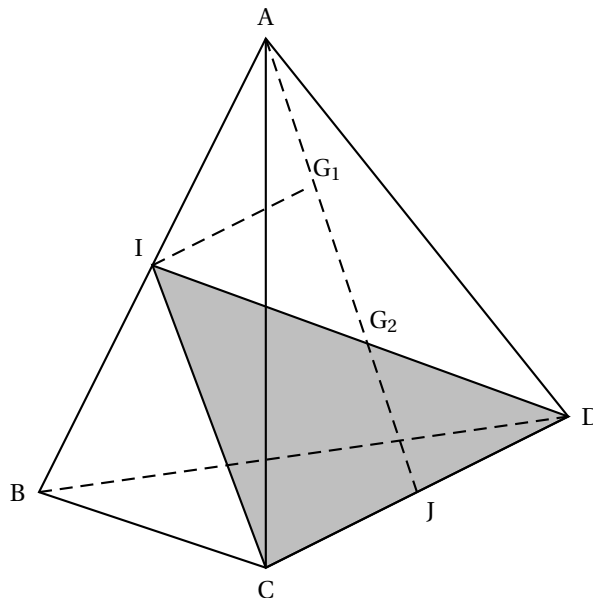
$$\text{On a trouvé que } z = 2 \left(-\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} + i \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} \right), \text{ ces quotients étant le cosinus}$$

et le sinus de $\frac{7\pi}{8}$.

On sait que $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ et que $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Donc $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus du supplément à π de $\frac{7\pi}{8}$, donc de $\frac{\pi}{8}$. Réponse D.

EXERCICE 4**5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. a. Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1); (B, 1); (C, -1); (D, 1)\}$. Ce barycentre existe puisque la somme $1 + 1 - 1 + 1$ est non nulle et par définition :
- $$\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0} \text{ et d'autre part } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$
- La première égalité vectorielle peut s'écrire
- $$\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{G_1I} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \iff$$
- $$2\overrightarrow{G_1I} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$
- Placez I, J et G_1 sur la figure (voir ci-dessous). L'égalité trouvée montre que les droites (IG_1) et (CD) sont parallèles. On a de plus $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{CJ}$.



- b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1); (B, 1); (D, 2)\}$. D'après l'associativité G_2 est aussi le barycentre de $\{(I, 2), (D, 2)\}$ soit le milieu de $[ID]$
- c. On sait que J milieu de $[CD]$ peut s'écrire $\overrightarrow{JD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{IG_1}$.
Conclusion : $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{JD}$ équivaut à IG_1DJ est un parallélogramme.
Ses diagonales $[ID]$ et JG_1 ont donc le même milieu. Or celui de $[ID]$ est G_2 qui est aussi celui de JG_2 .
2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1); (B, 1); (C, m-2); (D, m)\}$.
- a. Le barycentre G_m existe si $1 + 1 + m - 2 + m \neq 0 \iff m \neq 0$. On a donc $\mathcal{E} = \mathbb{R} - \{0\}$.

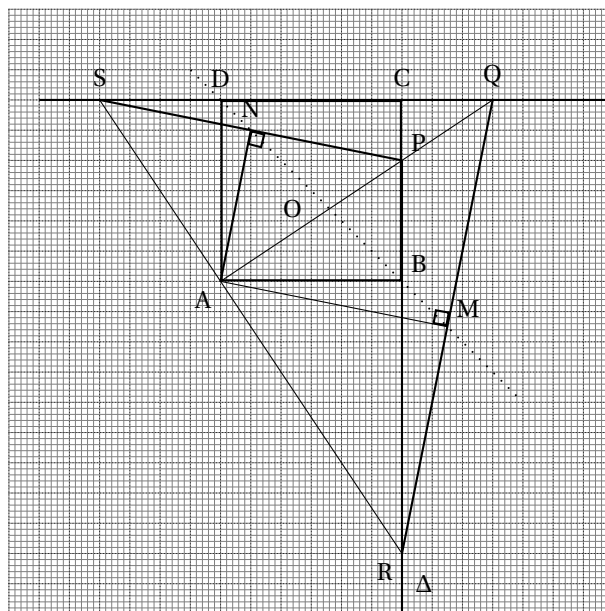
- b.** Par associativité G_m est le barycentre de $\{I, 2\}, (C, m-2); (D, m)\}$, appartient au plan (ICD) .
- c.** Par définition du barycentre $\overrightarrow{G_m A} + \overrightarrow{G_m B} + (m-2)\overrightarrow{G_m C} + m\overrightarrow{G_m D} = \vec{0} \iff \overrightarrow{G_m J} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{G_m J} + \overrightarrow{JB} + (m-2)\overrightarrow{G_m J} + (m-2)\overrightarrow{JC} + m\overrightarrow{G_m J} + m\overrightarrow{JD} = \vec{0} \iff 2m\overrightarrow{JG_m} = 2\overrightarrow{JI} - 2\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{CI}$.
Finalement on a donc $m\overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{CI} = \text{constante}$. Émontrez que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.
- d.** On a donc pour tout $m \in \mathcal{E} : \overrightarrow{JG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{CI}$, qui montre que G_m appartient à la parallèle à la droite (CI) contenant J . Comme $m \neq 0$, $\frac{1}{m} \neq 0$.
Conclusion : l'ensemble de tous les points G_m est la droite parallèle à (CI) contenant J (c'est-à-dire la droite (JA) d'après les questions précédentes) privée du point J .

EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Faire une figure.



- 2.** Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- a.** L'image par r de la droite (BC) est une droite perpendiculaire, contenant l'image par r de B , soit D : c'est donc la droite (CD) .
- b.** $R = (BC) \cap (AS)$. Son image appartient donc aux images des droites (BC) , soit (CD) et (AS) , soit (AP) . L'image de R est donc le point Q .
De même P est le point commun aux droites (BC) et (AQ) ; son image est donc le point commun aux droites (CD) et (AR) : c'est donc le point S .
- c.** Il en résulte par définition de la rotation (isométrie) que les triangles ARQ et APS sont rectangles isocèles en A .

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Déterminez les images respectives de R et de P par s . M est le milieu de $[RQ]$, donc (AM) est médiane et hauteur du rectangle isocèle ARQ . Le triangle AMQ est donc lui aussi rectangle isocèle (en M) et $AM = \frac{1}{\sqrt{2}}AR$;

de plus $(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$.

Conclusion : l'image de R par s est le point M . On démontre de même que l'image de P par s est le point N .

b. N est l'image de P par s et P appartient au segment $[BC]$ ($P \neq B$). N appartient donc à l'image du segment $]BC]$ par s .

Or si O est le centre du carré $ABCD$, la configuration du triangle ABO est encore une configuration de triangle rectangle isocèle et le point O est l'image de B par s .

Il en est de même pour le triangle rectangle isocèle ACD et le point D est l'image de C par s .

Conclusion : l'ensemble des points N est le segment $]OD]$ (O exclu).

c. On a vu à la question 3 que $M = s(R)$ et $S = s(P)$.

Les quatre points R, B, P et C sont alignés, donc leurs images respectivement M, O, N et D sont alignées.