Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} & = & \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{array}\right.$

Soit D une droite munie d'un repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   Exprimez u_n en fonction de n.
3. Comparez a_n et b_n. Étudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.
6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

EXERCICE 2 — 7 points

Commun à tous les candidats

But de l'exercice : approcher $\ln(1 + a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;\ +\infty[$.

Soit $a \in [0\,;\ +\infty[$.

On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\text{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\text{d}t$.

1. Calculez $I_0(a)$ en fonction de a.
2. À l'aide d'une intégration par parties, exprimez $I_1(a)$ en fonction de a
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrez que

$$I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x$.
   Démontrez en calculant $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$, que $I_5(a) = \ln(1 + a) - P(a)$.
5. Soit $J(a) = \displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\text{d}t$. Calculez $J(a)$.

6. **a.** Démontrez que pour tout $t \in [0~;~a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geqslant (t-a)^5$.

   b. Démontrez que pour tout $a \in [0~;~+\infty[$, $J(a) \leqslant I_5(a) \leqslant 0$.

7. En déduire que pour tout $a \in [0~;~+\infty[$, $|\ln(1+a) - P(a)| \leqslant \dfrac{a^6}{6}$.

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

   A : $2\sqrt{2}$ B : $2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$ C : $2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right)$ D : $2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

   A : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ B : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ C : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ D : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

3. z s'écrit sous forme exponentielle :

   A : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$ B : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ C : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$ D : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

   A : $\dfrac{7\pi}{8}$ B : $\dfrac{5\pi}{8}$ C : $\dfrac{3\pi}{8}$ D : $\dfrac{\pi}{8}$

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le tétraèdre ABCD; on note I milieu du segment [AB] et J celui de [CD].

1. **a.** Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1)~;~(B, 1)~;~(C, -1)~;~(D, 1)\}$.
   Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez I, J et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).

   b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1)~;~(B, 1)~;~(D, 2)\}$.
   Démontrez que G_2 est le milieu du segment [ID]. Placez G_2.

   c. Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
   En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et J.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 1)~;~(B, 1)~;~(C, m-2)~;~(D, m)\}$.

   a. Précisez l'ensemble $\mathscr{E}$ des valeurs de m pour lesquelles le barycentre G_m existe.
   Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel m appartient à l'ensemble $\mathscr{E}$.

b. Démontrez que G_m, appartient au plan (ICD).

c. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{\text{J}G_m}$ est constant.

d. En déduire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble $\mathscr{E}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

b. Déterminez les images de R et de P par r.

c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.

b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B?

c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.